CUADERNO DE MATEMÁTICAS 3º ESO

Departamento de Matemáticas IES Juana I de Castilla
Curso 2020/2021

INDICE

TEMA 1. FRACCIONES Y DECIMALES.

1- NÚMEROS RACIONALES.

RECUERDA:

Los **números naturales** se designan por $\mathbb{N}$, y son $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5, \ldots.\}$

Los **números enteros** son los naturales y sus opuestos, y se designan por la letra $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z} = \{\ldots., -3, -2, -1, 0, 1, 2\ , 3, \ldots\}$

Una **fracción** es el cociente indicado de dos números enteros

$$\frac{a}{b} \to \frac{Numerador}{Denominador}$$

Si el numerador es múltiplo del denominador, la fracción representa un número entero. En caso contrario, representa un **número fraccionario.**

Simplificación de fracciones. Para simplificar una fracción, se dividen el numerador y el denominador por el mismo número. Una fracción que no se puede simplificar se dice que es **irreducible.**

Dos fracciones son equivalentes cuando expresan la misma porción de unidad, es decir, cuando al simplificarse, dan lugar a la misma fracción irreducible.

Para **comparar dos fracciones con distinto denominador,** las reducimos a común denominador, buscando dos fracciones equivalentes a ellas con el mismo denominador.

Los **números racionales** se designan por la letra $\mathbb{Q}$**,** y es la unión de todos los números enteros y fraccionarios, es decir son aquellos que se pueden poner en forma de fracción.

Dibuja la recta real y coloca en ella de forma aproximada los siguientes números:

$$\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{7}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{10}, \frac{1}{6}, -\frac{5}{3}$$

$$\frac{4}{5}, -\frac{5}{3}, \frac{7}{6}, -\frac{19}{30}, -\frac{1}{10}, \frac{3}{15}$$

$$-0.5, \frac{4}{3}, -\frac{5}{12}, \frac{5}{8}, 1.3, -\frac{7}{24}, \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{5}, -\ \frac{1}{3}, -2.1, \frac{2}{7}, -\frac{4}{21}, 0.8, \frac{8}{15}, \frac{3}{35}$$

$$\frac{5}{6}, -\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{10}, \frac{8}{15}, -\frac{7}{12}, \frac{3}{4}$$

1. Ordena de mayor a menor los números del apartado anterior.

2. Simplifica las siguientes fracciones hasta conseguir la fracción irreducible.

$$\frac{35}{140}, -\frac{160}{240}, \frac{384}{336}, -\frac{132}{495}, \frac{550}{150}, -\frac{288}{360}, \frac{189}{351}, \frac{225}{400}$$

3. Agrupa las fracciones que sean equivalentes.

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{9}, \frac{4}{10}, \frac{10}{25}, \frac{9}{77}, \frac{4}{12}$$

$$\frac{4}{3}, \frac{6}{14}, \frac{21}{49}, \frac{3}{7}, \frac{8}{6}, \frac{24}{18}, \frac{16}{12}$$

$$\frac{2}{3}, \frac{35}{49}, \frac{5}{7}, \frac{4}{6}, \frac{32}{48}, \frac{25}{35}, \frac{14}{21}$$

2- OPERACIONES CON FRACCIONES.

RECUERDA:

- Para **sumar o restar fracciones con igual denominador**, se suman o se restan los numeradores, dejando el mismo denominador.
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$
- Para **sumar y restar fracciones con distinto denominador**, reduciremos a común denominador.
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot(b\colon mcm(b,c))+c\cdot(c\colon mcm(b,d))}{mcm(b,d)}$$
- Si alguno de los **sumandos es un número entero**, se le trata como una fracción con denominador la unidad.
$$\frac{a}{b}+c=\frac{a}{b}+\frac{c}{1}$$
- Para **multiplicar fracciones** se multiplican los numeradores y se multiplican los denominadores.
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$
- La **inversa de una fracción** es aquella que resulta de intercambiar el numerador y el denominador.
$$\frac{b}{a}\,inversa\ de\ \frac{a}{b}$$
- Para calcular el **cociente de dos fracciones** se multiplican la primera por la inversa de la segunda.
$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$
- **Las fracciones son operadores.** Para calcular la fracción de una cantidad, se multiplica la fracción por dicha cantidad.
    - Las distintas partes (fracciones) de un todo suman 1.
    - Para hallar la parte de otra parte de una cantidad, se multiplican.

5. Realiza las siguientes operaciones:

$$\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{8}{3}-\left(4+\frac{3}{2}\ \cdot 7\right)=$$

$$\frac{2}{5}+\frac{7}{3}\ \cdot\frac{9}{2}-\frac{11}{3}:\frac{5}{4}=$$

$$\frac{5}{12}+\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\right)\ \cdot\left(\frac{-3}{8}\right)=$$

$$10+\frac{7}{2}:\frac{6}{8}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{9}{2}-\frac{10}{3}\right)=$$

$$\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{2}\right)-\frac{4}{11}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right)=$$

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+5-3\cdot\left(4:\frac{3}{5}+1\right)=$$

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{5}{3}-\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\right]\cdot\frac{8}{5}=$$

$$\frac{4}{5}:\left[\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)-\frac{3}{8}\right]-3\cdot\left(1-\frac{2}{5}\right)=$$

$$-\frac{2}{3}\cdot\left[\left(1:\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-\frac{3}{10}:\frac{1}{5}\right)\right]\cdot\left[\left(-\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{2}\right):3\right]=$$

$$\frac{5}{6}-\frac{3}{7}:\frac{9}{14}+\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{9}\right):\frac{16}{45}-\frac{1}{24}=$$

6. Julio pasa un cuarto del día en el colegio, un octavo lo dedica a comer, un sexto a estudiar, un doceavo a hacer deporte y el resto a dormir. ¿Qué fracción de día dedica a dormir?

7. A dos primos les toca los 13/18 de una herencia familiar. Si uno de ellos recibe 5/9 ¿Cuánto recibirá el otro?

8. Un ciclista recorre el primer día 2/7 de la distancia, el segundo 1/8 y el tercero retrocede 3/14. ¿Qué fracción de distancia lleva recorrido?

9. Un estudiante invierte 1/3 de su salario semanal en ir al cine, 3/5 en revistas deportivas y el resto lo ahorra. ¿Qué fracción del dinero ahorra a la semana?.

10. Un hortelano planta dos tercios de su huerta de tomates y un quinto de pimientos y el resto lo deja sin cultivar. ¿Qué fracción de la huerta no ha cultivado? Si la huerta tenía 2840 m^2, ¿cuántos ha plantado de tomates? ¿Qué tipo de número se obtiene?

11. De una garrafa de leche se saca primero la mitad y después la quinta parte del resto, quedando todavía en la garrafa 12 litros ¿cuál es la capacidad de la garrafa?

12. Los 3/4 de las calculadoras de bolsillo que vende un comercio son científicas y, de éstas, una fracción 5/12 son programables. Averigua qué fracción de las calculadoras vendidas son programables. De 400 calculadoras vendidas en un año, ¿cuántas eran programables?

13. En un partido de baloncesto Luis hizo 1/8 de los puntos, Sonia los 2/8 y Laura los 3/8. Los restantes jugadores hicieron 16 puntos. Calcula el número de puntos conseguidos por Luis, Sonia y Laura.

14. Un embalse está lleno en 3/4 de su capacidad. Gracias a las lluvias la cantidad de agua aumenta 1/5 de lo que faltaba por llenarse. Durante el año siguiente se consume 1/10 del agua que había. ¿Qué fracción de la capacidad del embalse queda al final del año?

15. De mis vacaciones de verano 2/3 las paso en mi pueblo, una vez allí, 1/5 del tiempo estoy en la piscina. ¿Qué fracción de mis vacaciones estoy en la piscina? Si tengo 90 días de vacaciones ¿Cuántos días paso en la piscina?

3- NÚMEROS DECIMALES.

RECUERDA:

Tipos de números decimales.

- **Decimal exacto:** La parte decimal de un número decimal exacto está compuesta por una cantidad finita de términos.
  Ejemplos: 5,04 ; 0,023 ; -8,2409
- **Decimal periódico:** La parte decimal tiene infinitas cifras que se repiten periódicamente.
  - ✓ **Periodico puro**: La parte decimal, llamada periodo, se repite infinitamente.
    Ejemplo: 7,81818181…. = $7,\widehat{81}$
  - ✓ **Periodico mixto:** Su parte decimal está compuesta por una parte no periódica y una parte periódica o período.
    Ejemplo: 23, 34012012012….= 23, $34\widehat{012}$
- **Decimal no exacto y no periódico:** Números decimales que no pertenecen a ninguno de los tipos anteriores, es decir, su parte decimal tiene infinitas cifras que no se repiten periódicamente.
  Ejemplos: $\sqrt{2}$ = 1,4142135… π = 3,14159265…

Paso de fracción a decimal

- Para obtener la expresión decimal de una fracción se efectúa la división del numerador entre el denominador.
- El cociente puede ser **un número entero**, cuando el numerador es un múltiplo del denominador.
- Toda fracción irreducible da lugar a un número decimal:
  - ✓ **Un decimal exacto**, si el denominador solo tiene factores primos 2 y/o 5.
  - ✓ **Un decimal periódico**, si el denominador tiene algún factor primo distinto de 2 y 5.

16. Escribe cuatro números comprendidos entre cada par de números:
    a) 1,6 y 1,8
    b) 0,98 y 1
    c) $2,\hat{3}$ y 2,4
    d) - 4,123 y - 4,122
    e) $3,\widehat{12}$ y $3,\widehat{121}$

17. Ordena de mayor a menor.
    a) $2,7\hat{1}$; $2,\hat{7}$; $2,\widehat{71}$; 2,7
    b) $34,47\hat{5}$; $34,\widehat{475}$; $34,4\widehat{75}$; 34,475
    c) $12,4\widehat{55}$; $12,4\widehat{55}$; $12,\widehat{455}$; 12,455

d) $25,9\hat{9}$; $25,\widehat{99}$; $25,9\widehat{99}$; 25,99

18. Expresa en forma de decimal las siguientes fracciones y di que tipo de número decimal es:
$\frac{7}{5}, -\frac{5}{3}, \frac{48}{50}, \frac{75}{99}, -\frac{32}{25}, \frac{56}{30}, \frac{45}{33}, -\frac{125}{180}$

4- PASO DE DECIMAL A FRACCIÓN.

RECUERDA:

- **De decimal exacto a fracción.** En el numerador se pone todo el número sin la coma decimal y en el denominador se colocan tantos ceros como cifras decimales tenga el número. Si se puede simplificar, se simplifica.

$$0{,}045 = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$$

- **De decimal periódico puro a fracción.** En el numerador se anota el número, sin la coma decimal, y se le resta él o los números que están antes del período. En el denominador se pone un 9 por cada número que está en el período. Si se puede simplificar, se simplifica.
-

$$2,\widehat{41} = \frac{241 - 2}{99} = \frac{239}{99}$$

- **De decimal periódico mixto a fracción.** El numerador de la fracción se obtiene restando al número, sin la coma decimal, la parte entera y el anteperíodo. El denominador de la fracción se obtiene colocando tantos 9 como cifras tenga el período y tantos 0 como cifras tenga el anteperíodo. Si se puede simplificar, se simplifica.

$$1{,}02\hat{7} = \frac{1027 - 102}{900} = \frac{925}{900} = \frac{37}{36}$$

- **Decimales no periódicos.** Los números decimales con infinitas cifras decimales no periódicas no se pueden poner en forma de fracción.

19. Expresa en forma de fracción:
    a) $0{,}6\hat{7}$
    b) $3{,}6\widehat{54}$

c) $3{,}0\widehat{03}$

d) $10{,}12\hat{3}$

e) $6{,}7\widehat{23}0$

f) $0{,}\widehat{65}$

g) 50,1

h) $0{,}04\hat{8}$

20. Calcula pasando previamente a fracción:
a) $6{,}\hat{7} - 6{,}07 =$

b) $3{,}7 - 1{,}\widehat{07} =$

c) $4{,}5\hat{6} + 5{,}3\hat{2} =$

d) $6{,}\widehat{18} - 7{,}\widehat{85} =$

TEMA 2. POTENCIAS Y RAÍCES.

1- POTENCIACIÓN.

RECUERDA:

Propiedades de las potencias

1. $a^0 = 1$
2. $a^1 = a$
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4. $a^m\, a^n = a^{m+n}$
5. $a^m \div a^n = a^{m-n}$
6. $(a \div b)^n = a^n \div b^n$
7. $(a\, b)^n = a^n\, b^n$
8. $(-a)^{2n} = a^{2n}$
9. $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$
10. $a^{-n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$
11. $\sqrt[n]{a} = b \rightarrow b^n = a$

1. Expresa como potencia única:

   $(-2)^5 \cdot (-2)^0 \cdot (-2)^{-3} \cdot (-2) =$

   $6^2 \cdot (-2)^2 \cdot 3^2 =$

   $(-6)^3 \cdot (-6)^{-4} =$

   $2^4 \cdot 2 \cdot 8 =$

   $(-4)^3 \cdot (-4)^5 \cdot 16 =$

   $\left(-\frac{2}{7}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)^{-5} =$

   $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \frac{1}{16} =$

2. Expresa como potencia única:
   $25^{-3} \cdot 5^{-6} \cdot 125 =$

   $16 \cdot 8^{-2} \cdot 2^{2} =$

   $[(-5)^{2}]^{3} \cdot (-5)^{5} \cdot (-5)^{4} =$

   $(6^{3} \cdot 6^{2}) : (6^{4})^{-2} =$

   $81^{-2} \cdot 3^{-7} =$

3. Expresa el resultado de las siguientes operaciones en forma de una única potencia:

   $[(-3)^{5} \cdot 9]^{2} : (-3)^{3} =$

   $$\frac{12^2 \cdot 3^{-5}}{9 \cdot 6^4} =$$

   $$\left(\frac{3}{7}\right)^{-13} : \left(\frac{3}{7}\right)^{5} =$$

   $$\frac{2^5 \cdot 2^{-17}}{2^{-14}} =$$

   $$\left[\left(\frac{1}{5} + 1\right)^{-1}\right]^{6} =$$

   $$\left(\frac{1}{3}\right)^{6} : \left(\frac{1}{9}\right)^{4} =$$

   $$\left(\frac{2}{11}\right)^{3} \cdot \left(-\frac{3}{11}\right)^{5} =$$

   $$\frac{3^{-2}}{5 \cdot 15^4} =$$

4. Simplifica:

   $$\frac{5^2 \cdot 3^5 \cdot 2^{-3} \cdot (-3)^4}{5^4 \cdot 3^7 \cdot 2^2} =$$

$$\frac{3^5 \cdot 7^4 \cdot 2^4 \cdot 7^{-4}}{3^4 \cdot 2^{-3}} =$$

$$\frac{3^3 \cdot 2^{-4} \cdot 5^2}{3^5 \cdot 2^3 \cdot 5^{-1}} =$$

$$\frac{4^3 \cdot (-2)^{-4} \cdot (-5)^{-3}}{(-8)^{-5} \cdot 2^3 \cdot 5^{-1}} =$$

$$\frac{7^3 \cdot (-2)^{-4} \cdot (-5)^{-3}}{(-7)^{-5} \cdot 2^3 \cdot 5^{-1}} =$$

$$\frac{7^3 \cdot 2^{-4} \cdot 5^{-3}}{7^{-5} \cdot 2^3 \cdot 5^{-1}} =$$

2- NOTACIÓN CIENTÍFICA.

RECUERDA:
Un número en **notación científica** N = a,bcd…. 10^n consta de:

- ✓ Una parte entera formada por una sola cifra no nula.
- ✓ Una parte decimal.
- ✓ Una potencia de base 10 con exponente entero.

En esta notación el exponente indica el orden de la magnitud.
Ejemplos:

- La velocidad de la luz 300.000.000 m/s =3·100.000.000 m/s = $3 \cdot 10^9$ m/s
- La masa de la Tierra 5,98 $\cdot 10^{24}$ Kg
- Un año luz 9,46 $\cdot 10^{15}$ m
- La masa de un protón 1,69 $\cdot 10^{-28}$ Kg

4. Expresa los siguientes números en notación científica:
   A) 1000
   B) 13,15
   C) 1000000
   D) 0,000323
   E) 0,0035

5. Escribe los números siguientes con todas sus cifras:
   a) $4 \cdot 10^7$

b) $5 \cdot 10^{-4}$

c) $9{,}73 \cdot 10^{8}$

d) $8{,}5 \cdot 10^{-6}$

e) $3{,}8 \cdot 10^{10}$

f) $1{,}5 \cdot 10^{-5}$

6. Escribe estos números en notación científica:
   a) 13 800 000
   b) 0,000005
   c) 4 800 000 000
   d) 0,0000173

7. Expresa en notación científica.
   a) Distancia Tierra-Sol: 150 000 000 km.
   b) Caudal de una catarata: 1 200 000 l/s.
   c) Velocidad de la luz: 300 000 000 m/s.
   d) Emisión de CO2 en un año en España: 54 900 000 000 kg

8. Efectúa las siguientes operaciones como en el ejemplo y, después, comprueba el resultado con la calculadora:

   $2 \cdot 10^{-5} + 1{,}8 \cdot 10^{-6} = 20 \cdot 10^{-6} + 1{,}8 \cdot 10^{-6} = (20 + 1{,}8) \cdot 10^{-6} = 21{,}8 \cdot 10^{-6} =$
   $2{,}18 \cdot 10^{-5}$

   a) $3{,}6 \cdot 10^{12} - 4 \cdot 10^{11} =$
   b) $5 \cdot 10^{9} + 8{,}1 \cdot 10^{10} =$
   c) $8 \cdot 10^{-8} - 5 \cdot 10^{-9} =$
   d) $5{,}32 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-6} =$

3- RAICES Y RADICALES.

RECUERDA:

- Si a = b^n entonces $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{b}$

- En la expresión $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{b}$ **,** n es el **índice** y a es el **radicando.**
- Las expresiones en las que aparecen raíces indicadas se llaman **radicales**.

<u>Algunas reglas para el manejo de radicales.</u>

- **Multiplicación de raíces de igual índice**: Se multiplican las bases y se conserva el índice.

$$\sqrt[n]{a} \bullet \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

- **Extracción de factores fuera del radical:** Para sacar fuera del radical se descompone el radicando en producto de potencias con exponente el índice de la raíz (divides el exponente entre el índice y el cociente es el exponente de ese factor fuera de la raíz y el resto el exponente del factor pero dentro del radical); luego se aplica la propiedad del producto de radicales.

$$\sqrt[3]{625} = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{5} = 5\sqrt[3]{5}$$

- **Potencia de radicales**

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

- **Suma y resta de radicales:** Podemos sumar y restar radicales solamente cuando estos tengan el mismo índice y contengan una misma base

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = (3 + 5 - 1)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

9. Calcula cuando sea posible:

$\sqrt[6]{64} =$

$\sqrt[3]{-8} =$

$\sqrt[4]{625} =$

$\sqrt{-8} =$

$\sqrt[5]{-1} =$

$\sqrt[4]{\dfrac{625}{16}} =$

10. Simplifica los siguientes radicales:

$\sqrt[4]{25} =$

$\sqrt[30]{8^{16}x^4} =$

$\sqrt[8]{8^2} =$

$\sqrt[14]{x^{16}} =$

11. Saca factores de la raíz:

$\sqrt[4]{576} =$

$\sqrt[3]{864} =$

$\sqrt[3]{81x^{10}y^4z} =$

$\sqrt[4]{\dfrac{625ab^5}{a^5b^3}} =$

12. Extraer todos los factores posibles de los siguientes radicales:

$\sqrt{18} =$

$\sqrt[3]{16} =$

$\sqrt{9a^3}$ = $\sqrt{98a^5b^7c^{21}}$ =

13. Simplifica las expresiones que puedas, y en las restantes, indica por qué no se pueden simplificar.
$7\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$ $4\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$

$\sqrt{3} - \sqrt{2}$ $\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$

14. Suma los siguientes radicales indicados.
$\sqrt{45} - \sqrt{125} - \sqrt{20} =$

$\sqrt{75} - \sqrt{147} + \sqrt{675} - \sqrt{12} =$

$\sqrt{175} + \sqrt{63} - 2\sqrt{28} =$

$\sqrt{20} + 3\sqrt{45} + 2\sqrt{125} =$

15. Realiza las siguientes sumas:
$4\sqrt{12} - 3\sqrt{27} + \sqrt{75} =$

$3\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} - 7\sqrt[3]{250} =$

$\sqrt{18} - 3\sqrt{12} + 5\sqrt{50} + 4\sqrt{27} =$

$\sqrt{125} + \sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24} =$

$3\sqrt{18} - 5\sqrt{32} + 6\sqrt{50} =$

$\sqrt[3]{4} + 6\sqrt[3]{4} - 7\sqrt[3]{2^2} =$

$\sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48} =$

$\sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{1250} =$

$12\sqrt[3]{81} - 6\sqrt[3]{24} + 2\sqrt[3]{375} =$

16. Realiza las siguientes multiplicaciones:
$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{7} =$

$\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[4]{2} =$

$\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt{2} =$

$\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt[6]{2} =$

$\sqrt[12]{9} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{2} =$

$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[4]{125} =$

4- NÚMEROS RACIONALES E IRRACIONALES.

RECUERDA:

- $\mathbb{R}$ Reales
  - $\mathbb{Q}$ Racionales
    - $\mathbb{Z}$ Enteros
      - $\mathbb{N}$ Naturales
        - 1 Uno
        - Primos
        - Compuestos
      - 0 Cero
      - Enteros negativos
    - Fraccionarios
      - Exactos
      - Periódicos
        - Puros
        - Mixtos
  - Irracionales

17. Indica cuáles de las siguientes raíces son racionales y cuáles irracionales:

$\sqrt{64}$ $\quad \sqrt[3]{64}$ $\quad \sqrt[5]{64}$ $\quad \sqrt{100}$ $\quad \sqrt[3]{100}$ $\quad \sqrt{\frac{1}{4}}$

18. Clasifica los números: números

$\frac{\pi}{2}$ $\quad \sqrt{36}$ $\quad 2.25111\ldots$ $\quad \sqrt{-5}$ $\quad \frac{75}{-5}$

TEMA 3. PROBLEMAS ARÍTMÉTICOS

RECUERDA:

*- **Razón** es el cociente entre dos números a y b. Se escribe **a/b** y se lee "a es a b". Una razón no tiene unidades y sirve para comprar; indica el número de veces que una cantidad es mayor que otra.*

*- Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si, al multiplicar una de ellas por un número, la otra queda multiplicada por el mismo número. "Si una crece la otra también"*

*- Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si, al multiplicar una de ellas por un número, la otra queda dividida por el mismo número. "Si una crece la otra disminuye"*

*- **Regla de tres simple directo o inversa**. Para resolver los problemas en los que intervienen dos magnitudes primero comprobamos si las magnitudes son directa o inversamente, y:*

- Si son de proporcionalidad directa $\left.\begin{array}{l}\Delta \longrightarrow \text{O} \\ \otimes \longrightarrow x\end{array}\right\} \ -x=\dfrac{\otimes \cdot \text{O}}{\Delta}$

- Si son de proporcionalidad inversa $\left.\begin{array}{l}\Delta \longrightarrow \text{O} \\ \otimes \longrightarrow x\end{array}\right\} \ x=\dfrac{\Delta \cdot \text{O}}{\otimes}$

1- PROPORCIONALIDAD SIMPLE

RESUELVE

1. Indica si hay proporcionalidad directa, inversa o si no hay ninguna proporcionalidad:
   a) Cantidad de personas que viajan en un autobús y dinero recaudado.
   b) Cantidad de refrescos que caben en una caja y diámetro de las botellas.
   c) Número de litros que escapan por segundo en el desagüe de una piscina y diámetro del desagúe.
   d) Velocidad media de un ciclista y distancia recorrida.
   e) Número de vueltas que da una rueda para recorrer una distancia y diámetro de la rueda.
   f) Número de comensales para zamparse una tarta y cantidad que corresponde a cada uno.
   g) Tiempo que tarda un balón en caer al suelo y altura desde la que se lanza.
   h) Número de horas que está encendida una bombilla y gasto que ocasiona.
   i) Número de peldaños de una escalera móvil de altura fija y separación entre ellos.
   j) Número de peldaños de una escalera de altura fija y anchura de ellos.
   k) Numero de goles marcados por un equipo y partidos ganados.
2. Resuelve los siguientes problemas de regla de tres directa.
   a) 35 ordenadores valen 42.000 euros. ¿Cuánto valen 40 ordenadores? ¿Cuánto vale 1 ordenador?.
   b) En una hora realizo 12 ejercicios, ¿Cuánto tardo en realizar 51 ejercicios?
3. Resuelve los siguientes problemas de regla de tres inversa.
   a) Nueve trabajadores cargan un camión en 2 horas. ¿Cuánto tardan seis trabajadores?
   b) Si tardo 2 horas en llegar a Madrid con una velocidad de 100 Km/h. ¿Cuánto tardo con una velocidad de 120 km/h?
4. Resuelve los siguientes problemas de regla de 3 directa o inversa.
   a) Un ganadero tiene pienso suficiente para alimentar 220 vacas durante 45 días. ¿Cuántos días podrá alimentar con la misma cantidad de pienso a 450 vacas?
   b) Un kilopondio son 9,8 Newton. ¿Cuántos kp son 20 Newton?

c) Un corredor da 5 vueltas a una pista polideportiva en 15 minutos. Si sigue al mismo ritmo, ¿cuánto tardará en dar 25 vueltas?

d) Para recorrer los 360 km que hay entre Madrid y Valencia un coche tardó 3 horas a una velocidad de 120 km/h. Si disminuye la velocidad a 100 km/h, ¿cuánto tardará?

e) En un taller de confección, si se trabajan 8 horas diarias se taran 6 días en servir un pedido. ¿Cuánto se tardará en servir el pedido si se trabajan 12 horas diarias?

2- PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

RECUERDA:

*- En los problemas de **proporcionalidad compuesta** intervienen, al menos, tres magnitudes. Cada dos de ellas son directa o inversamente proporcionales.*

- Para resolver los problemas de proporcionalidad compuesta colocamos los datos en un cuadro situando la magnitud que lleva la incógnita en último lugar. Después, identificamos si entre ella y cada una de las demás la proporcionalidad es directa o inversa. .
Según sea la relación entre las variables nos encontramos con tres tipos de reglas de tres. En cada una de ellas despejamos de distinta forma de la siguiente manera:

Regla de tres compuesta directa

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \longrightarrow B_1 \longrightarrow C_1 \longrightarrow D \\ A_2 \longrightarrow B_2 \longrightarrow C_2 \longrightarrow x \end{array}\right\} \qquad \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{B_1}{B_2} \cdot \frac{C_1}{C_2} = \frac{D}{x}$$

$$x = \frac{A_2 \cdot B_2 \cdot C_2 \cdot D}{A_1 \cdot B_1 \cdot C_1}$$

Regla de tres compuesta inversa

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \longrightarrow B_1 \longrightarrow C_1 \longrightarrow D \\ A_2 \longrightarrow B_2 \longrightarrow C_2 \longrightarrow x \end{array}\right\} \qquad \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{B_2}{B_1} \cdot \frac{C_2}{C_1} = \frac{D}{x}$$

$$x = \frac{A_1 \cdot B_1 \cdot C_1 \cdot D}{A_2 \cdot B_2 \cdot C_2}$$

Regla de tres compuesta mixta

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \longrightarrow B_1 \longrightarrow C_1 \longrightarrow D \\ A_2 \longrightarrow B_2 \longrightarrow C_2 \longrightarrow x \end{array}\right\} \qquad \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{B_2}{B_1} \cdot \frac{C_1}{C_2} = \frac{D}{x}$$

$$x = \frac{A_2 \cdot B_1 \cdot C_2 \cdot D}{A_1 \cdot B_2 \cdot C_1}$$

RESUELVE

1. 15 obreros trabajando 6 horas diarias, tardan 30 días en realizar un trabajo. ¿Cuántos días tardarán en hacer el mismo trabajo 10 obreros, empleando 8 horas diarias?
2. En una fábrica 5 máquinas llenan 7.200 envases en 6 horas. ¿Cuántos envases llenarán 7 máquinas en 8 horas?
3. Un crucero por el Mediterráneo para 200 personas durante 15 días necesita, para gastos de alojamiento y comida, 54.000 €. ¿Cuánto se gastará para alojar y alimentar a 250 personas durante 10 días?

4. Si 18 máquinas mueven 1200 m3 de tierra en 12 días, ¿cuántos días necesitarán 24 máquinas para mover 1600 m3 de tierra?
5. Un motor funcionando durante 10 días y trabajando 8 horas diarias ha originado un gasto de 1200 euros. ¿Cuánto gastará el motor funcionando 18 días a razón de 9 horas diarias?. 46) Con 15 máquinas de escribir durante 6 horas, se escriben 220 folios. ¿ Cuantos folios se escribirán con 45 máquinas durante 12 horas?
6. Un caminante recorre 120 Km. andando 8 horas diarias durante 5 días. ¿Cuántas horas necesitará para recorrer 129 Km en 12 días?.
7. Un depósito puede suministrar 12 litros diarios de agua para 25 familias durante 150 días. ¿Cuántos litros podrán suministrar a 40 familias durante 200 días.

RECUERDA:

*- El **reparto proporcional** se utiliza para repartir una cierta cantidad en partes proporcionales a otras. Dependiendo de la relación que exista entre la cantidad a repartir, y las partes proporcionales el reparto puede ser: directo o inverso.*

*- El **reparto proporcional es directo** cuando; cuanto mayor es el número proporcional, mas cantidad le corresponde. Veamos, con un ejemplo, como se calcula: "Repartimos 210€ directamente proporcional a 1, 2 y 3 "*

1º. Sumamos las partes proporcionales: $1+2+3=6$

2º. Dividimos la cantidad a repartir "210" entre la suma anterior"6": $\frac{210}{6}=35$

3º. Multiplicamos esta cantidad "35" por cada una de las partes proporcionales y con esto calculamos la cantidad que le corresponde a cada uno:

$$\begin{array}{lcl} 1 & \longrightarrow & 1\cdot 35=35€ \\ 2 & \longrightarrow & 2\cdot 35=70€ \\ 3 & \longrightarrow & 3\cdot 35=105€ \end{array}$$

*- El **reparto proporcional es inverso** cuando; cuanto mayor es el número proporcional, menor cantidad le corresponde en el reparto. Veamos, con un ejemplo, como se calcula: "Repartimos 720€ inversamente proporcional a 3,4 y 6". Se calcula como si repartiéramos 720€ directamente proporcionales a sus inversos* $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \text{y } \frac{1}{6}$

1º. Sumamos las inversas de las partes proporcionales:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{4+3+2}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

2º. Dividimos la cantidad a repartir "720"entre la suma anterior "$\frac{3}{4}$"*:*

$$\frac{720}{\frac{3}{4}}=720:\frac{3}{4}=\frac{720\cdot 4}{3}=960$$

3º. Multiplicamos esta cantidad 960 por cada una de las inversas de las partes proporcionales y con esto calculamos la cantidad que le corresponde a cada uno:

$$\begin{array}{lcl} 3 & \longrightarrow & \frac{1}{3}\cdot 960=320€ \\ 4 & \longrightarrow & \frac{1}{4}\cdot 960=240€ \\ 6 & \longrightarrow & \frac{1}{6}\cdot 960=160€ \end{array}$$

3- REPARTOS PROPORCIONALES

RESUELVE

1. Un padre reparte 1680 euros en parte proporcionales a las edades de sus hijos, siendo estas 12, 10, y 20 años. ¿Cuánto le corresponderá a cada uno?
2. El premio de un sorteo se reparte en forma inversamente proporcional al número de boletos adquiridos y son respectivamente: 3, 5, y 7. ¿Cuánto dinero recibió el que compro más boletos, si en total se repartió 1633 euros?
3. Distribuir 4500 euros que sean inversamente proporcionales a 2, 3, 5, y 6. ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y la menor de las partes?
4. Tres socios invierten 50,000 euros, 70,000 euros, y 90000 euros respectivamente, en un negocio que, al cabo de un año, da 13230 euros de beneficios. ¿Cuánto se llevará cada uno?
5. Ana ha recibido un plus de 136 euros por haber trabajado 8 horas extras. ¿Cuánto recibirán Víctor y José que han realizado 15 y 12 horas extras respectivamente?
6. Un instituto decide repartir un premio de 1274 euros, en forma inversamente proporcional al número de tardanzas que han tenido los alumnos de un salón de clases. Si Juan ha tenido 4 tardanzas, Pablo 6 tardanzas, y Rafa 8 tardanzas respectivamente en todo el curso. ¿Quién recibe menos, y cuánto?

4- CÁLCULOS CON PORCENTAJES

RECUERDA:

*- El **porcentaje** o tanto por ciento (%), es una de las aplicaciones más usadas de las proporciones.* Como "por ciento" quiere decir "por cada 100" siempre que hay un porcentaje "hay que dividir por 100", y al número decimal que obtiene *se le llama **Índice de variación**.*

- Si queremos calcular el tanto por ciento de una cantidad (valor fina), expresamos el porcentaje en forma decimal (índice de variación) y lo multiplicamos por la cantidad (valor Inicial)

Valor Final = Valor Inicial · Índice de variación

Ejemplo: Calcula el 12% de 48.

Valor Final= x *Valor Inicial = 48* *Índice de variación = 0,12*	*x = 48 · 0,12 = 5,76* *por tanto:* *el 12 % de 48 es 5,76*

Esta formula es válida para calcular:

- *El **tanto por ciento de una cantidad**, que sería calcular la cantidad final*
- *El **porcentaje correspondiente a una proporción**, que sería calcular el índice de variación*
- *Los **aumentos porcentuales** que sería calcular la cantidad final con índice de variación, uno más el aumento porcentual expresado en forma decimal.*
- *Las **disminuciones porcentuales** que sería calcular la cantidad final con índice de variación uno menos la disminución porcentual expresado en forma decimal.*

*- Si los **porcentajes están encadenados** utilizamos la misma fórmula y en este caso el índice de variación es el producto de los sucesivos índices de variación.*

RESUELVE

1. Un billete de avión a Paris costaba el verano pasado 460 €. Si este año ha subido un 20 %, ¿cuánto vale el billete?

2. Una tienda pone una oferta con una rebaja del 15 %. Si un televisor está marcado en 900 €, ¿Qué rebaja me harán? ¿Cuánto voy a pagar por el televisor?

3. El gasto de electricidad de este mes es de 90 €. Al recibir la factura tengo que pagar además el 18 % de IVA. ¿Cuál es el coste total de la factura?

4. He comprado un ordenador que costaba 600 €, pero ahora está rebajado con el 25 %. ¿Cuánto pago por el ordenador?

5. He comprado una bicicleta por 250 €. Si quiero ganarme un 32 %, ¿A cómo debo venderla? 23.- Unas zapatillas que tienen un 30 % de rebaja me han costado 42 €, ¿cuánto costaban antes de la rebaja?

6. Un pueblo tenía el año pasado 3.000 habitantes y este año tiene 3.150. ¿Qué tanto % ha aumentado la población? 8.- En un teatro con 540 localidades se han vendido el 65 %. Si cada entrada cuesta 25 €, ¿Cuál ha sido la recaudación?

7. Una familia compra un frigorífico que cuesta 840 € pagando una entrada del 30 % al contado y el resto en 6 mensualidades. ¿Cuál es el importe de cada mensualidad?

8. He comprado directamente a la fábrica placas solares para calentar el agua. Su precio está marcado en 3.850 €. Como compro directamente en la fábrica me rebajan el 40 %, y cuando ya tengo el precio rebajado al hacerme la factura tengo que pagar el 18 % de IVA. ¿Cuánto me cuestan al final las placas solares?

TEMA 4. PROGRESIONES

1- SUCESIONES

Los elementos de la sucesión se llaman términos y se suelen designar mediante una letra con subíndice. El subíndice de cada elemento indica el lugar que ocupa en la sucesión:

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots.$

Se llama sucesión a un conjunto de números dados ordenadamente de modo que se puedan numerar: primero, segundo, tercero…

1. Di cuáles son los términos $a_1, a_3\ y\ a_6$ de las siguientes sucesiones:
   a) 6, 7, 8, 9, 10, …

   b) 0, -2, -4, -6, -8, …

   c) 1; 0,1; 0,01; 0,001;…

   d) -2, -4, -8, -16, -32, …

   e) 1, 2, 3, 5, 8, ….

El término general de una sucesión es una expresión algebraica que nos permite calcular cualquier término de la sucesión sabiendo el lugar que ocupa, y se representa por a_n.

Ejemplo: El término general de la sucesión 2, 4, 6, 8, ….. es: $a_n = 2n$

El término general de la sucesión 1, 4, 9, 16, … es $a_n=n^2$

2. Escribe los cuatro primeros términos de la sucesión de término general:
   a) $a_n = n^2 - 3n + 2$

   b) $a_n = \frac{n+4}{2n+1}$

   c) $b_n = (-1)^n$

Una **sucesión** es **recurrente** cuando cada término, después de uno dado, se obtiene a partir de los anteriores.
Ejemplo: En la sucesión 1, 3, 5, 7, 9, 11, … cada término es el anterior más 2, por tanto, su término general es:

$$a_n = a_{n-1} + 2$$

3. Obtén los cuatro primeros términos de cada sucesión:
   a) $a_1 = -1,\ a_n = n + a_{n-1}$

   b) $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$

c) $b_1 = 2,\ b_2 = 4,\ \ b_n = \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}$

2- PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que cada término, excepto el primero, se obtiene sumándole al anterior un número fijo llamado **diferencia, d.**

El término general de una progresión aritmética es:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$$

Donde a_1 es el primer término y *d* la diferencia.

Ejemplo: La sucesión 1, 4, 7, 11, … es una progresión aritmética de diferencia d = 3. Su término general es: $a_n = 1 + (n-1) \cdot 3$

4. ¿Qué relación existe entre los términos de la sucesión 30, 70, 110, 150,…?

5. Calcula los seis primeros términos de una progresión aritmética de diferencia igual *a* – 8, sabiendo que el primer término vale 20.

6. De las progresiones siguientes señala cuáles son aritméticas. De aquellas que lo sean calcula su diferencia así como su término general:

a) 6, 10, 14, 18...

b) 2, 5, 4, 7,6, 9...

c) 2, 4, 7, 11, 16, …

d) 1, 4, 9, 16, 25, …

e) 7, -3, -13, -23, …

7. Calcula el término general y el término que ocupa el lugar diez de una progresión aritmética de la que se conoce que el primer término a_1 = -20 y la diferencia 12.

8. Calcula el término general y el término que ocupa el lugar veinte de una progresión aritmética sabiendo que el primer término vale -2 y la diferencia 2.

9. El sexto término de una progresión aritmética es -12 y la diferencia -3. Halla su término general y el término que ocupa el lugar cuarenta.

10. Calcula el término que ocupa el lugar 100 de una progresión aritmética cuyo primer término es igual a 4 y la diferencia es 5.

11. El décimo término de una progresión aritmética es 45 y la diferencia es 4. Halla el primer término, la diferencia y su término general.

12. Halla el primer término de una progresión aritmética y la diferencia, sabiendo que a_3 = 24 y a_{10} = 66.

La suma $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ de los n primeros término de una progresión aritmética es:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Ejemplo: La sucesión 3, 5, 7, 9, 11, ...es una progresión aritmética de diferencia d = 2.

Su término general es $a_n = 3 + (n-1) \cdot 2$

Si queremos calcular la suma de sus diez primeros términos:

$a_{10} = 3 + 9 \cdot 2$ = 3 + 18 = 21. Por tanto, $S_{10} = \frac{(3+21)\cdot 10}{2} = \frac{24\cdot 10}{2} = \frac{240}{2} = 120$

13. Halla la suma de los primeros 15 términos de una progresión aritmética en la que a_1 =7 y el cuarto término es 40.

14. Calcula la suma de los 15 primeros términos de una progresión aritmética en la que $a_3 = 1$ y $a_7 = -7$.

15. Sabiendo que el quinto término de una progresión aritmética es 18 y la diferencia es 2, halla la suma de los nueve primeros términos de la sucesión.

16. El primer término de una progresión aritmética es -1 y el decimoquinto es 27. Hallar la diferencia y la suma de los 15 primeros términos.

17. Halla la suma de los quince primeros múltiplos de 5.

18. El término sexto de una progresión aritmética es 4 y la diferencia 1/2. Halla el término 20 y la suma de los veinte primeros términos.

19. El cuarto término de una progresión aritmética es 10, y el sexto es 16. Escribir el término general de dicha progresión y la suma de sus seis primeros términos.

20. En una progresión aritmética, $a_{10} = 32$ y d=5. Averigua el valor de a_{25} y la suma de los veinticinco primeros términos.

21. En una progresión aritmética $a_8 = 12$ y $a_{12} = 32$. Calcula su diferencia y el término general. Halla el valor de sus doce primeros términos.

22. Calcula el término general de una progresión aritmética si el segundo término es 18 y el séptimo vale -12. Calcula el valor de la suma de sus siete primeros términos.

3- PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que cada término (menos el primero) se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo, ***r***, llamado **razón** de la progresión.

El término general de una progresión geométrica es: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, donde a_1 es el primer término y r la razón.

Ejemplo: 2, -8, 32, -128, … es una progresión geométrica de razón r = -4. Su término general es $a_n = 2 \cdot (-4)^{n-1}$

23. De las progresiones siguientes señala cuáles son geométricas y calcula su razón, así como su término general:

a) 6, 10, 14, 18...

b) 2, 6, 18, 54...

c) 1, 2, 4, 8, 16, …

d) 5, -10, 20, -40, …

e) 12, 9, 6, 3, 0, …

f) 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$…

24. Calcula el término undécimo de una progresión geométrica cuyo primer término es igual a 1 y la razón es 2.

25. El quinto término de una progresión geométrica es 81 y el primero es 1. Halla los cinco primeros términos de dicha progresión.

26. Sabiendo que el séptimo término de una progresión geométrica es 1 y la razón 1/2, halla el primer término.

27. En una progresión geométrica se sabe que el término decimoquinto es igual a 512 y que el término décimo es igual a 16. Halla el primer término y la razón.

28. Calcula el término décimo de una progresión geométrica sabiendo que el segundo término vale 20 y la razón 2.

29. De una progresión geométrica se sabe que los términos octavo y decimotercero valen, respectivamente, 64 y 2.048. Calcula los términos intermedios de dicha progresión.

30. En una progresión geométrica $a_1 = 4$ y $a_2 = 3$. Obtén el término general y a_{20}

La suma $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ de los n primeros términos de una progresión geométrica es:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}$$

Ejemplo: En la progresión geométrica -1, -2, -4, -8, … su razón r = 2 y la suma de sus diez primeros términos es:

$$S_{10} = \frac{(-1) \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = \frac{(-1) \cdot (1024 - 1)}{1} = -1023$$

Si la razón de una progresión geométrica cumple $-1 < r < 1$, la suma de todos sus términos es:

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

Ejemplo: En la progresión geométrica en la que $a_1 = 5$ y $r = \frac{1}{2}$, la suma de sus infinitos términos es:

$$S = \frac{5}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10$$

31. En una progresión geométrica el primer término es 5 y la razón es 3. Calcula la suma de los ocho primeros términos.

32. En una progresión geométrica el segundo término es dos y el cuarto es $\frac{1}{2}$. Halla la suma de los primeros seis términos y la suma de sus infinitos términos, si es posible.

33. Dada una progresión geométrica en la que $a_3=2$ y $r=0.1$, calcula:

a) La suma de los primeros ocho términos.

b) La suma de los infinitos términos.

34. El sexto término de una progresión geométrica es 18 y el cuarto es 6. Obtén el término general y la suma de sus diez primeros términos.

35. El tercer término de una progresión geométrica vale 80, y la razón es 4. Calcula la suma de los cinco primeros términos.

36. Calcula la suma de los 12 primeros términos de la progresión geométrica siguiente: 243, 81, 27, 9...

37. En una progresión geométrica se sabe que el término decimoquinto es igual a 512 y que el término décimo es igual a 16. Halla el primer término, la razón y la suma de todos sus términos.

38. En una progresión geométrica cuyo primer término es 6 y el tercer término 30. Halla el cuarto término, el término general y la suma de sus siete primeros términos.

39. En una progresión geométrica de términos positivos $a_2 = 10$ y $a_4 = 2250$. Obtén los primeros cinco términos, el término general y la suma de los cinco primeros términos.

40. Teresa ha comprado un caballo y quiere herrarlo. Para ello tiene que ponerle 20 clavos, el primero de los cuales cuesta 1 céntimo y cada uno de los restantes vale un céntimo más que el anterior. ¿Cuánto paga en total para herrarlo?

41. En un aparcamiento cobran 0.25 euros por la primera hora de estacionamiento y, por cada hora siguiente, el doble de lo cobrado en la hora anterior. ¿Cuánto pagaremos por estar aparcados durante ocho horas?

42. Un estudiante de 3º de ESO se propone el día 1 de septiembre repasar matemáticas durante una quincena, haciendo cada día 2 ejercicios más que el día anterior. Si el primer día empezó haciendo un ejercicio:

a) ¿Cuántos ejercicios le tocará hacer el día 15 de septiembre?

b) ¿Cuántos ejercicios hará en total?

43. Dejamos caer una pelota desde una altura de 1 metro, y en cada uno de los botes que da sube a una altura igual a la mitad del bote anterior. ¿Qué altura alcanzara en el quinto bote?

44. En una urbanización realizaron la instalación del gas natural en el año 1999. Consideramos que en ese momento se hizo la primera revisión. Sabiendo que las revisiones sucesivas se realizan cada 3 años, responde:

a) ¿En qué año se realizará la décima revisión?
b) ¿Cuál es el número de revisión que se realizará en el año 2035?

45. La maquinaria de una fábrica pierde cada año el 20% de su valor. En el momento de su compra valía 40 000 €.

a) ¿Cuánto valía un año después de comprarla? ¿Y dos años después?
b) ¿En cuánto se valorará 10 años después de haberla adquirido?

46. Una máquina costó inicialmente 10 480 €. Al cabo de unos años se vendió a la mitad de su precio. Pasados unos años, volvió a venderse por la mitad, y así sucesivamente.

a) ¿Cuánto le costó la máquina al quinto propietario?
b) Si el total de propietarios ha sido 7, ¿cuál es la suma total pagada por esa máquina?

TEMA 5: EL LENGUAJE ALGEBRAICO

1- MONOMIOS

Un **monomio** es una expresión algebraica formada por el producto de un número, llamado **coeficiente**, y una o varias letras elevadas a un número natural, que forman la **parte literal** del monomio.
Las letras de la parte literal se llaman **variables.**
El **grado** de un monomio es el exponente de la letra que forma la parte literal, si solo hay una, o la suma de los exponentes, si hay más de una.

Ejemplo: $5x^2y^3$ es un monomio de coeficiente 5 y parte literal x^2y^3.
Sus variables son x, y. Su grado es 3 + 2 = 5.

1. Completa la siguiente tabla:

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
$-3x^3y^2z^4$			
$5b^2c$			
$x^{15}y^2$			
$-\frac{2}{3}xy^5$			

Dos monomios son **semejantes** si tienen la misma parte literal

Ejemplo: $-3x^2$ y $5x^2$ son semejantes.

Dos monomios son **opuestos** si son semejantes y tienen sus coeficientes opuestos.

Ejemplo: $3x^2$ y $-3x^2$ son monomios opuestos

2- OPERACIONES CON MONOMIOS

Suma y resta:
La suma (o resta) de dos o más monomios solo se puede realizar si son semejantes; en caso contrario, la operación se deja indicada.
El resultado de la suma (o resta) de dos o más monomios semejantes es otro monomio semejante que tiene por coeficiente la suma (o resta) de los coeficientes.

Ejemplo: $6x^4 + 5x^4 - 3x^4 = 8x^4$
$7x^2 - 5x + x^2 + 3x = 8x^2 - 2x$

Multiplicación y división:
- El producto de dos o más monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes, y por parte literal, el producto de las partes literales de ambos monomios.

Ejemplo: $-4x^{2y} \cdot 3x^3y^2 = -12x^5y^3$

- El **cociente** de dos o más monomios tiene por coeficiente el cociente de los coeficientes, y por parte literal, el cociente de las partes literales de ambos monomios.

Ejemplo: $-3x^2y^5 : 2xy^2 = \frac{-3}{2}xy^3$

1. Realiza las siguientes operaciones:

a) $6x^2 + 2x^2 - x^2 + 3x^2 - x^2 =$

b) $3x^2y^2 - 2x^2y^2 + 6x^2y^2 - x^2y^2 =$

c) $(-5ab) \cdot (6acb) =$

d) $(-8x^2y) \cdot \ (-4xy^2) =$

e) $(15xy) : \ (-3x) =$

f) $(2x^2yz) : \ (-2xy) =$

3- POLINOMIOS

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma o resta de dos o más monomios no semejantes.

Al trabajar con un polinomio, conviene agrupar los monomios semejantes. Esta operación se denomina reducir el polinomio. Un **polinomio** está **reducido** cuando no tiene monomios semejantes.

Los polinomios se designan con letras mayúsculas, indicando entre paréntesis las variables que intervienen.

Ejemplo: $P(x) = 6x^5 - 3x^4 - 9x + 7$ es un polinomio de una variable, x.
$Q(x, y) = 2x^2y - 5y^3 + 3xy - 1$ es un polinomio de dos variables, x e y.

Cada uno de los monomios que forman un polinomio se denomina **término**, y el que no tiene parte literal, **término independiente.**

Al mayor de los grados de los términos de un polinomio reducido se le llama **grado** del polinomio.

Ejemplo: Los términos del polinomio $P(x) = 6x^5 - 3x^4 - 9x + 7$ son:
$6x^5, -3x^4, -9x, +7$. Su término independiente es +7 y su grado 5.

El **polinomio opuesto** de P(x) se designa por – P(x) y se obtiene cambiando el signo de los coeficientes de todos los términos de P(x).

Ejemplo: El opuesto de $P(x) = 6x^5 - 3x^4 - 9x + 7$ es
$-P(x) = -6x^5 + 3x^4 + 9x - 7$

3. Reduce los siguientes polinomios, indica su grado así como su término independiente:

a) $R(x) = x^5 + 1 - 3 + 4x^5 - 3x - 2x$

b) $P(x) = -x^2 - x - 2 - x^3 + x^2 - x - 2$

c) $Q(x) = x^4 - x^3 - x^4 + 2x^2 - 7x$

El **valor numérico** de un polinomio es el resultado que se obtiene al sustituir las variables por números determinados y operar después.

El valor numérico de un polinomio P(x) para x =a se expresa por P(a).

Ejemplo: El valor numérico de P(x) = $2x^3 - 3x^2 - 2$ para x = -1 es:

$P(-1) = 2\cdot(-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 - 2 = -2 - 3 - 2 = -7$

Un número es **raíz de un polinomio** cuando el valor numérico del polinomio para dicho número es cero.

Ejemplo: x = 4 es una raíz del polinomio $P(x) = x^2 - 5x + 4$, porque

$P(4) = 16 - 20 + 4 = 0$

4. A partir de los polinomios del ejercicio anterior calcula el valor numérico de cada uno de ellos para los valores de la variable que se indican:

a) R(- 1) =

b) Q(0) =

c) P (2) =

d) Q(1) =

4- OPERACIONES CON POLINOMIOS

Para **sumar** polinomios, se agrupan los monomios semejantes y se suman sus coeficientes.

Para **restar** polinomios se cambia el signo de los términos del sustraendo y se suman los polinomios.

Ejemplo:
Dados los polinomios $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ y $Q(x) = -x^3 + x^2 - 2$:

$P(x) + Q(x) = (2x^3 - 3x^2 + 4x + 1) + (-x^3 + x^2 - 2) =$

$= 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1 - x^3 + x^2 - 2 = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$

$P(x) - Q(x) = (2x^3 - 3x^2 + 4x + 1) - (-x^3 + x^2 - 2) =$

$= 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1 + x^3 - x^2 + 2 = 3x^3 - 4x^2 + 4x + 3$

4. Dados los polinomios $p(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x$, $q(x) = 5x^3 - 3x + 3$ y $r(x) = 2x^3 - x^2 - 2$, calcula:

a) $p(x) + q(x) =$

b) $p(x) - q(x) =$

c) $p(x) + q(x) - r(x) =$

d) $p(x) - q(x) - r(x) =$

Para **multiplicar** dos polinomios se multiplica cada monomio de uno de ellos por todos los monomios del otro, y, después, se suman los polinomios obtenidos.

Ejemplos:

$3x^2 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 6x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 6x^2$

Dados: $P(x) = 2x^2 - 3$, $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (2x^2 - 3) \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x) = \\ &= 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 6x^3 + 9x^2 - 12x = \\ &= 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x \end{aligned}$$

5. Calcula el resultado de las siguientes operaciones:

a) $2x^2 \cdot (x^4 - 3x^3 + 5x - 7) =$

b) $(2x+1) \cdot (5x-2) =$

c) $(x^2 - 3x + 1) \cdot (x^2 - 5) =$

d) $(x - 7) \cdot (x^2 - 3x - 2) \cdot (-2x + 5) =$

e) $(5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1) \cdot (x^4 - x^2 - 4) =$

6. Sean los polinomios $A(x) = 3x^4 + 5x^3 - 2x + 3$, $B(x) = x^2 - 5x + 1$ y $C(x) = 7x^3 - 2x^2 + 3x - 6$, calcula:

a) $A(x) \cdot [\, B(x) + C(x) \,] =$

b) $A(x) \cdot B(x) + 5x^2 \cdot C(x) =$

c) $A(x) \cdot [\, B(x) - C(x) \,] =$

d) $A(x) \cdot B(x) - (2x^3 - 3x) \cdot C(x) =$

Para **dividir un monomio por un polinomio**, se divide cada término del polinomio por el monomio.

Ejemplo: $(8x^4 + 2x^3 + 4x^2) : (2x) = 4x^3 + x^2 + 2x$

En la **división de polinomios** se sigue el mismo procedimiento que en la división de números naturales.

Ejemplo:

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & & +2x^3 & & -x & -8 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{7-7}
\underline{-x^5} & \underline{+2x^4} & \underline{-x^3} & & & & x^3 + 2x^2 + 5x + 8 \\
 & 2x^4 & +x^3 & & & & \\
 & \underline{-2x^4} & \underline{+4x^3} & \underline{-2x^2} & & & \\
 & & 5x^3 & -2x^2 & -x & & \\
 & & \underline{-5x^3} & \underline{+10x^2} & \underline{-5x} & & \\
 & & & 8x^2 & -6x & -8 & \\
 & & & \underline{-8x^2} & \underline{+16x} & \underline{-8} & \\
 & & & & 10x & -16 &
\end{array}
$$

La división ha terminado cuando el grado del resto es menor que el del divisor.

En el ejemplo anterior, el cociente es $C(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 8$. El resto es $R(x) = 10x - 16$

7. Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $(x^3 - 3x^2 + 2x) : x$

b) $(2x^3 - 3x^2 - 5x - 5) : (x - 2)$

c) $(5x^4 - 14 + 5x + x^3) : (3 - x^2)$

d) $\left(2x^3 - 3x + 2\right) : \left(2x - 1\right)$

e) $\dfrac{x^5 + x}{x^2 + 3}$

f) $\dfrac{x^3 + x^2 - 3x + 7}{x - 1}$

8. Realiza las divisiones:

a) $(x^3 - 3x^2 + 6x - 2) : (x^2 + x - 1)$

c) $(2x^3 - 5x^2 + x - 1) : (2x - 1)$

b) $(x^4 - x^3 + 8x + 4) : (x^2 - x + 2)$

d) $(x^6 + x^2 - 3) : (x^2 + 1)$

9. Efectúa las siguientes divisiones:

a) $(x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 3x - 4):(x^2 + x + 2)$

b) $(6x^5 + 2x^4 - 23x^3 + 11x^2 + 12x - 3) : (3x^3 - 5x^2 + 3)$

c) $(4x^3 - 2x^2 + 8x - 4) : (2x^2 - 4x + 1)$

d) $(x^3 - x^2 - x - 2) : (x^2 + x + 1)$

La **regla de Ruffini** es un algoritmo que permite obtener fácilmente el cociente y el resto de la división de un polinomio por un binomio de la forma *x-a*.

Veamos el algoritmo con un ejemplo, consideremos $P(x)=2x^3 + x^2 - 3x + 5$ y $Q(x)=x-1$. La división se realiza como sigue:

	2	1	-3	5
1				
	2			

Fig. 1

	2	1	-3	5
1		2		
	2	3		

Fig. 2

	2	1	-3	5
1		2	3	
	2	3	0	

Fig. 3

	2	1	-3	5
1		2	3	0
	2	3	0	5

Fig. 4

1. Se ordena el polinomio P(x) de mayor a menor grado y se colocan los coeficientes de cada término . Si no apareciese algún término entre el de mayor grado y el de menor se coloca un 0. A la izquierda se pone el número que se resta a x en Q(x), en nuestro caso 1 y se baja el coeficiente del término de mayor grado, este paso se corresponde con la figura 1.

2. Se multiplica el coeficiente que se ha bajado (2) por el que se ha colocado a la izquierda (1). El resultado del producto se coloca debajo del coeficiente del término siguiente y se suman. Figura 2

3. El resultado de la suma se vuelve a multiplicar por el número situado a la izquierda y se repite el proceso. Figuras 3 y 4.

4. El último número (recuadro rojo en Fig. 4) se corresponde con el resto de la división mientras que el resto de números de la fila inferior son los coeficientes del cociente.
Resto = 5 y $C(x)=2x^2 + 3x$ por tanto $2x^3 + x^2 - 3x + 5 =(x-1)(2x^2 + 3x) +5$

10. Realiza las siguientes divisiones utilizando la regla de Ruffini y escribe el cociente y el resto.

a) $(2x^3 + 5x^2 - 4x + 1):(x-2)$

b) $(x + 3x^2 - 5x^4 + 6):(x-3)$

$c)$ $(x^2 - x^3 + 3x^4 + 2x + 1):(x+1)$

d) $(3x^2 - x^3 + 2) : (x+1)$

e) $(x^4 - 2x^3 - 1) : (x - 4)$

f) $(x^3 - 5x^2 + 7) : (x + 3)$

g) $(7x^3 - 19x^2 - 91x + 105) : (x - 5)$

h) $(x^8 - 1) : (x - 1)$

5- FACTOR COMÚN

Sacar factor común consiste en transformar una expresión de suma o resta en producto.

Ejemplo: $-18y^2x^3 - 12yx^2 + 24yx = 6yx \cdot (-3yx^2 - 2x + 4)$

11. Saca factor común en los siguientes polinomios:

a) $9x^2 - 3x =$

b) $81x^2 - 49 =$

c) $16x^6 + 8x^5 - 4x^3 + 6x^2 =$

d) $4x^2 - 12xy + y^2 =$

e) $18x^3y^2 - 12x^2y^3 =$

f) $20a^4b^2c + 36a^2b^3 =$

g) $3x^5y^3 - 18x^4y^2 + 6x^3y =$

h) $x(x+2)-6(x+2) =$

i) $2x(x+1) -6(x+1) =$

j) $x^2(x-1)+x(x-1) =$

6- IGUALDADES NOTABLES

El **cuadrado de una suma** de monomios es igual al cuadrado del primero más el doble del primero por el segundo más el cuadro del segundo.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ejemplo:

$$(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

El **cuadrado de una diferencia** de monomios es igual al cuadrado del primero menos el doble del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo:

$$(2x-5y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5y + (5y)^2 = 4x^2 - 20xy + 25y^2$$

El **producto de una suma de monomios por su diferencia** es igual a la diferencia de sus cuadrados.

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

Ejemplo:

$$(4x^3 - 5x) \cdot (4x^3 + 5x) = (4x^3)^2 - (5x)^2 = 16x^6 - 25x^2$$

12. Desarrolla los siguientes productos notables:

$a)\ (7x+11)^2$ $e)\ (2a-3b)^2$

$b)\ (2x+3y)^2$ $f)\ (4ax-1)^2$

$c)\ (a^2x+by^2)^2$ $g)\ (3a^3-5b^2)^2$

$d)\ (3a^3+8b^4)^2$ $h)\ (x^5-3ay^2)^2$

$i)\ (x+y)(x-y)$

$j)\ (x^2+a^2)(x^2-a^2)$

$k)\ (2a-1)(1+2a)$

$l)\ (1-3ax)(1+3ax)$

13. Factoriza, utilizando los productos notables:

a) $x^2-4x+4=$

b) $x^2-36=$

c) $x^2+12x+36=$

d) $y^2-x^2=$

e) $9-12x+4x^2\ =$

f) $4x^2-16=$

g) $x^2+8x+16=$

h) $x^2-8x+16=$

i) $25-x^2=$

j) $4x^2-4x+1=$

k) $x^2-81=$

l) $9x^2-6x+1=$

14. Utiliza los productos notables y la extracción de factores comunes para descomponer en factores las siguientes expresiones:

a) $6x^2y-9x^3y=$

b) $3x^2y-27y=$

c) $7x^3-7x=$

d) $3x^3+18x^2+27x=$

e) $8x^6-32x^5+32x^4=$

f) $x^5-x^3=$

7- FRACCIONES ALGEBRAICAS

Se llama **fracción algebraica** al cociente indicado de dos polinomios.

Ejemplo: $\frac{x}{3x^2-5}$, $\frac{1}{x+1}$, $\frac{2x+1}{x^3-2x^2+7x}$ son fracciones algebraicas.

Para **simplificar** una fracción algebraica se divide el numerador y el denominador por uno o más factores comunes a ambos. Se obtiene así una fracción equivalente.

Ejemplo: $$\frac{3x\cdot(x+1)^2}{6x^2\cdot(x+1)} = \frac{3\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+1)}{2\cdot3\cdot x\cdot x\cdot(x+1)} = \frac{x+1}{2x}$$

Para **reducir a común denominador** varias fracciones algebraicas, se sustituye cada fracción por otra equivalente de modo que todas tengan el mismo denominador.

Ejemplo: $\frac{3}{x}$, $\frac{5}{x-2}$ su denominador común es $x\cdot(x-2)$, luego:

$$\frac{3}{x} = \frac{3\cdot(x-2)}{x\cdot(x-2)} \quad \text{y} \quad \frac{5}{x-2} = \frac{5\cdot x}{x\cdot(x-2)}$$

Para **sumar** o **restar** fracciones algebraicas, se reducen a común denominador y se suman o se restan los numeradores, dejando el mismo denominador común.

Ejemplo: $$\frac{3}{x} + \frac{5}{x-2} = \frac{3\cdot(x-2)}{x\cdot(x-2)} + \frac{5x}{x\cdot(x-2)} = \frac{3x-6+5x}{x\cdot(x-2)} = \frac{8x-6}{x\cdot(x-2)}$$

El **producto** de dos fracciones algebraicas es el producto de sus numeradores partido el producto de sus denominadores.

Ejemplo: $$\frac{2x}{x-3}\cdot\frac{5x+1}{x^2} = \frac{2x\cdot(5x+1)}{(x-3)\cdot x^2} = \frac{2\cdot(5x+1)}{(x-3)\cdot x} = \frac{10x+2}{x^2-3x}$$

El **cociente** de dos fracciones algebraicas es el producto de la primera por la inversa de la segunda (producto cruzado de términos)

Ejemplo: $$\frac{5}{x-3} : \frac{x}{x^2+1} = \frac{5\cdot(x^2+1)}{(x-3)\cdot x} = \frac{5x^2+5}{x^2-3x}$$

15. Saca factor común y luego simplifica:

a) $\frac{5x+5}{3x+3} =$

c) $\frac{x^2+x}{x^2-1} =$

b) $\frac{x^2-3x}{2x-6} =$

d) $\frac{12x}{4x^2+2x} =$

16. Recuerda los productos notables, descompón en factores y simplifica:

a) $\frac{x^2-1}{x+1} =$

b) $\frac{x^2-1}{(x-1)^2} =$

c) $\frac{x^2-4}{2x-4}=$

d) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}=$

e) $\frac{x^2-16}{x^2+8x+16}=$

f) $\frac{x(x+2)}{x^2+4x+4}=$

g) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}=$

h) $\frac{x^2-9}{x^4-81}=$

17. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{a^2}{ab}=$

b) $\frac{21mn^2x^6}{28m^4n^2x^2}=$

c) $\frac{x^2y}{xy}=$

d) $\frac{14a^3b^4c^5}{21b^5c^2}=$

e) $\frac{42a^2c^3n}{26a^4c^5m}=$

f) $\frac{2a}{8a^2b}=$

g) $\frac{9x^2y^3}{24a^2x^3y^4}=$

$\frac{15a^{12}b^{15}c^{20}}{75a^{11}b^{16}c^{22}}=$

h) $\frac{3ab}{2a^2x+2a^3}=$

$\frac{xy}{3x^2y+3xy^2}=$

$\frac{15a^2bn-45a^2bm}{10a^2b^2n-30a^2b^2m}=$

i) $\frac{x^2-4}{5ax-10a}=$

$\frac{3x^2y+15xy}{x^2-25}=$

j) $\frac{3x^3+9x^2}{x^2+6x+9}=$

k) $\frac{3x^2-12}{x+2}=$

l) $\frac{(x-1)^2}{x^2-1}=$

m) $\frac{9-x^2}{x^2-3x}=$

n) $\frac{x^3-16x}{4x^3+32x^2+64x}=$

18. Halla, simplificando el resultado:

a) $\frac{9}{x}+\frac{5}{x}-\frac{7}{x}=$

b) $\frac{4}{a^2}-\frac{5}{a^2}-\frac{9}{a^2}=$

c) $\frac{6x}{3x-2}-\frac{4}{3x-2}=$

d) $\frac{4m}{2m+5}+\frac{5m+6}{2m+5}-\frac{7m+8}{2m+5}=$

e) $\frac{1}{x}+\frac{2}{3x}-\frac{5}{4x}=$

f) $\frac{9}{5x}-\frac{5}{2x}+\frac{3}{x}=$

g) $\frac{6}{x^2}+\frac{7}{2x}-\frac{5}{3x}=$

h) $\frac{m-2}{2m}+\frac{3m-1}{5m}=$

i) $\frac{x+6}{8x}-\frac{2x+5}{12x}=$

j) $\frac{y(x+y)}{x^2-y^2}-\frac{x}{x-y}=$

k) $\frac{x}{x-2y}-\frac{2xy}{x^2-2xy}+\frac{y}{x}=$

l) $\frac{2x}{y}-\frac{x^2}{xy-y^2}+\frac{y}{x-y}=$

m) $x-1+\frac{2}{x+1}=$

n) $\frac{5}{x^2}+\frac{3x}{x^2+x}-\frac{3}{x+1}=$

o) $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+1=$

p) $\frac{2x^2-5x}{x^2-9}-\frac{2x^2-4x+3}{x^2-9}=$

q) $\frac{-3x+1}{x+1}-\frac{5x+1}{x^2+x}=$

19. Efectuar las siguientes multiplicaciones y divisiones con fracciones algebraicas y simplifica el resultado, siempre que sea posible:

a) $\frac{3x}{2y}\cdot\frac{4y^2}{9x}=$

b) $\frac{5y^2}{ax^2}\cdot\frac{2ax^2}{10by}=$

c) $\frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{x^2-2x+1}{x} =$

e) $\frac{x^2-y^2}{x-y} : \frac{x^2-xy}{xy} =$

d) $\frac{3x-1}{2x} : \frac{6x-2}{3x+1} =$

f) $\frac{2a+a^2}{2x^2+xy} \cdot \frac{4x^2-y^2}{4+4a+a^2} =$

20. Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado:

a) $\left(1+\frac{x}{1-x}\right) \cdot \left(1-\frac{x}{1+x}\right) =$

b) $\left(1+\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}\right) : \left(a+3+\frac{2}{a}\right) =$

c) $\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{x^2-1}\right) : \frac{x}{x+1} =$

TEMA 6: ECUACIONES.

1- TIPOS DE IGUALDADES. ECUACIONES

Una igualdad está formada por dos expresiones algebraicas relacionadas mediante el signo =. Hay dos tipos de igualdades:

Identidades: la igualdad es cierta para cualquier valor de las variables.

Ejemplos: 5(x+1)=7x-2x+5 se cumple para cualquier valor de x.

x=1 -> 5·2=7-2+5; 10=10

x=0 -> 5·1=0-0+5; 5=5

Ecuaciones: la igualdad solamente se cumple para ciertos valores de las variables. Dichos valores se llaman soluciones de la ecuación.

Ejemplo: 2x-7=-4x+11 no se cumple para cualquier valor de x. veámoslo dando valores a x

Si x=3 -> 2·3-7=-4·3+11; 6-7=-12+11; -1=-1; 3 es solución.

Si x=0 -> 2·0-7=-4·0+11; 0-7=0+11; -7≠11; 0 no es solución.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Una ecuación de primer grado es aquella que, tras aplicar las siguientes reglas queda reducida a la forma ax=b, es decir, la incógnita x queda con grado uno.

1.- Quitar paréntesis, si los hay, utilizando la propiedad distributiva.

2.- Reducir al mismo denominador y quitar denominadores multiplicando los dos miembros de la ecuación por el mcm de los denominadores.

3.- Pasar los términos en x a un miembro y los términos numéricos al otro (trasponer términos) y reducir términos semejantes en cada miembro.

4.- Despejar la incógnita y comprobar la solución.

Resuelve las ecuaciones

1. 5 - 4(x-3) = x - 2(x-1)

2. 8(x-3) - 2(3-x) = 2(x+2) - 5(5-x)

3. $x - \frac{x}{4} - \frac{1}{2} = 3 + \frac{x}{4}$

4. (x+3)(2x-3) - 6x = (x-4)(2x+4) + 12

5. $4-\frac{x-9}{8}=\frac{x}{22}-\frac{1}{2}$

6. $\frac{3x-1}{10}-\frac{x-1}{4}=\frac{2x-31}{3}$

7. $(3x+1)^2+6+18(x+1)^2=9x(3x-2)+65$

8. $\frac{x-4}{3}+\frac{2x-3}{35}=\frac{5x-32}{9}-\frac{x+9}{28}$

9. $(x+15)(x-3)-(x-3)^2=30-15(x-1)$

10. $\frac{3x-1}{10}-\frac{x-1}{4}=\frac{2x-31}{3}$

11. $\frac{x+1}{2}-\frac{5x+9}{28}=\frac{x+6}{21}+5-\frac{x-12}{3}$

12. $\frac{11-6x}{5}-\frac{9-7x}{2}=\frac{5(x-1)}{6}$

13. $5-\frac{10x+1}{27}-\frac{x}{8}=\frac{13x+4}{18}-\frac{5(x-4)}{4}$

2- PROBLEMAS DE ECUACIONES

1.- En un rectángulo un lado es 3 cm. más largo que el otro y el perímetro mide 22 cm. ¿Cuánto mide cada lado?

2.- La edad de mi hermano es el doble que la mía y la suma de ambas edades es 42 ¿Cuántos años tengo?

3.- La base y altura de un rectángulo se diferencian en 8 unidades, si su perímetro es 20 cm ¿Cuánto miden sus lados?

4.- Un bolígrafo cuesta 40 cts más que un lápiz. Un chico compra 10 lapiceros y 4 bolígrafos por 12,8 € .¿Qué precio tiene cada lápiz?

5.- En una familia trabajan el padre, la madre y el hijo mayor, ganando conjuntamente 3.600 €. al mes. La ganancia de la madre es igual a los 2/3 de la del padre y, la del hijo 1/2 de la de su madre. ¿Cuánto gana cada uno?

6.- Dentro de 2 años la edad de Pedro será de 8 años menos que el doble de la que tiene ahora. ¿Qué edad tiene Pedro?

7.- La nota media de tres evaluaciones de Carmen en el área de Matemáticas se obtiene sumando las tres notas y dividiendo entre tres. Si ha sacado un 5 y un 7 en las dos primeras evaluaciones, ¿qué nota ha de sacar en la tercera para alcanzar una nota media de 6'5?

8.- Este año, la edad de Isabel es el triple que la de su hermano Antonio; dentro de 4 años, ella será 2 veces mayor. ¿Cuál es la edad de cada uno de los hermanos?

9.- La suma de dos números es 76, y si se divide el mayor entre el menor se obtiene 4 de cociente y 1 de resto. ¿Cuáles son esos números?

10.-Una joya de 80 gr está elaborada con una aleación de oro y cobre. Si la densidad de la joya es 14, ¿qué cantidad de oro tiene? (La densidad del oro es 19,25 y la del cobre 8,75).

3- ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

Una ecuación es de segundo grado si después de transformarla y pasar todos los términos al primer miembro de la ecuación tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{ax^2+bx+c=0}$$

Donde **a, b** y **c** son **números** llamados coeficientes de la ecuación.

Para resolverla se utiliza la siguiente fórmula, en la que solamente intervienen los coeficientes:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

donde el signo $\pm$ indica que una solución se obtiene sumando y la otra restando.

Así $x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{matrix} \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{matrix}$

Según sea el signo del número que aparece bajo la raíz, la ecuación puede tener dos, una o ninguna solución.

Una ecuación de segundo grado se llama **incompleta** cuando le falta, o bien el término en x, o bien el término independiente. La resolución es más sencilla si en lugar de aplicar la fórmula, se realizan los pasos siguientes:

- Ecuación incompleta $ax^2+c=0$. Despejamos x^2 y luego se calcula la raíz cuadrada.

  Ejemplo 1: $9x^2-25=0$; $9x^2=25$; $x^2=\frac{25}{9}$; $x=\pm\sqrt{\frac{25}{9}}=\pm\frac{5}{3}$

  Ejemplo 2: $9x^2+25=0$; $9x^2=-25$; $x^2=-25/9$; no tiene solución.

- Ecuación incompleta $ax^2+bx=0$.

Sacamos factor común x, nos queda una expresión con dos factores igualados a cero, por lo que uno de ellos tiene que ser cero.

Ejemplo: $9x^2-3x=0$; $x(9x-3)=0$; $x=0$ y $x=3/9=1/3$ son las soluciones

Una ecuación del tipo $(ax+b)\cdot(cx+d)=0$ es de segundo grado y se resuelve igualando cada factor a cero.

Ejemplo: $(3x-2)\cdot(2x+8)=0$; Soluciones $x=2/3$; $x=-4$

Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado:

1. $x^2-8x+15=0$

2. $2x^2-9x-1=0$

3. $4x^2-12x+9=0$

4. $11x + 21 = 2x^2$

5. $2x^2 - 1 = 1 - x - x^2$

6. $\left(x - 2\right)^2 = 3$

7. $(3x - 1)(3x + 6) = 0$

8. $(x + 1)^2 - (x + 1)(x - 1) = -x^2 + 2$

9. Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Pedro.

10. Para vallar una finca rectangular de 750 m² se han utilizado 110 m de cerca. Calcula las dimensiones de la finca.

11. Dos números naturales se diferencian en dos unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son esos números?

TEMA 7: SISTEMAS DE ECUACIONES.

Un **sistema de ecuaciones lineales** está formado por dos ecuaciones lineales de las que se busca una solución común:

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right\}$$ Una solución del sistema es todo par de números que verifican las dos ecuaciones a la vez. Resolver el sistema es encontrar su solución.

Según el número de soluciones que tiene un sistema, **se clasifican** en:

- **Sistemas compatibles determinados**. Tienen una única solución. Su representación gráfica es la de dos rectas que se cortan en un solo punto.
- **Sistemas compatibles indeterminados**. Tienen infinitas soluciones. Su representación gráfica es la de dos rectas que coinciden. Al resolverlos se obtiene 0·x=0
- **Sistemas incompatibles**. No tienen solución. Su representación gráfica es la de dos rectas paralelas. Al resolverlos se obtiene 0·x= k con k ≠ 0

Hay **tres métodos** para resolver un sistema de ecuaciones lineales:

- **Sustitución**: Se despeja en la primera ecuación la incógnita que resulte más sencillo, y se sustituye la expresión obtenida en la segunda ecuación.

$$\left\{\begin{array}{l} 3x-y=5 \\ 2x+7y=11 \end{array}\right. \xrightarrow{1^{\circ}\,despejar} \left\{\begin{array}{l} 3x-5=y \\ \end{array}\right. \xrightarrow{2^{\circ}\,Sustituir\,en\,la\,otra\,ecuación} 2x+7(3x-5)=11$$

$$Se\,resuelve\,la\,ecuación \quad 2x+21x-35=11$$

$$2x+21x=11+35$$

$$23x=46$$

$$x=2$$

$$y\ se\ obtiene\ el\ valor\ de\ la\ otra\ incógnita$$

$$y=3\cdot 2-5=1$$

$$Solución\,(x,y)=(2,1)$$

- **Igualación**: Se despeja en las dos ecuaciones la misma incógnita y después se igualan las expresiones obtenidas.

$$\left.\begin{array}{l} 5x-4y=19 \\ 2x+7y=-1 \end{array}\right\} \xrightarrow{Se\ despeja\ la\ misma\ incógnita\ de\ las\ dos\ ecuaciones} \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{19+4y}{5} \\ x=\dfrac{-1-7y}{2} \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{Igualamos\ las\ expresiones\ obtenidas} \frac{19+4y}{5}=\frac{-1-7y}{2} \quad Y\ resolvemos\ la\ ecuación$$

$$38+8y=-5-35y$$

$$43y=-43$$

$$y=-1\rightarrow x=3$$

$$(x,y)=(1,3)$$

- **Reducción**: Se multiplica cada ecuación por el número adecuado para que los coeficientes de una de las incógnitas en las dos ecuaciones sean opuestos (iguales y de signo contrario).

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right\}$$ Una forma de conseguirlo es obtener el mcm como coeficientes de las incógnitas, otra multiplicar la primera ecuación por a' y la segunda ecuación por a.

Si las incógnitas en las dos ecuaciones tienen el mismo signo además una de las dos ecuaciones se multiplica por -1.

$$\left.\begin{array}{l} 6x+7y=-23 \\ 5x+3y=-5 \end{array}\right\} \xrightarrow{-5\cdot 1^a ec.\quad 6\cdot 2^a ec.} \left.\begin{array}{r} -30x-35y=115 \\ 30x+18y=-30 \end{array}\right\}$$

$$-17y = 85$$

(x,y)= (2,-5)

Resuelve los siguientes Sistemas por el método que consideres conveniente:

1. $\begin{cases} \mathbf{5x-2y=2} \\ \mathbf{x+2y=2} \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-\dfrac{5-y}{2}=1 \\ x-\dfrac{y+3}{6}=5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x+5y=11 \\ 4x+2y=24 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2(x-1)+3(y+2)=-2 \\ 3x-2(y+1)=2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3\cdot(x-y)-2=y \\ 2x-3\cdot(y-1)=4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3\cdot(x-y)-2=y \\ 2x-3\cdot(y-1)=4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x-y=5 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{x-y}{2}-\dfrac{x+y}{2}=2 \\ -3x+10y=16 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{3x+y}{6}+\dfrac{x+2}{3}=4 \\ 2-3\cdot(x+y)=0 \end{cases}$

Resuelve los problemas

1. En un triángulo rectángulo, uno de sus ángulos agudos es 12° mayor que el otro. ¿Cuánto miden sus tres ángulos?

2. El perímetro de un triángulo isósceles es de 19 cm. La longitud de cada uno de sus lados iguales excede en 2 cm al doble de la longitud del lado desigual. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?

3. Antonio dice a Pedro: "el dinero que tengo es el doble del que tienes tú", y Pedro contesta: "si tú me das seis euros tendremos los dos igual cantidad". ¿Cuánto dinero tenía cada uno?

4. Si duplicamos el lado de un cuadrado, su área aumenta en 147 cm2. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

5. Calcula cuántos litros de aceite de orujo de 1,6 €/l tenemos que añadir a un bidón que contiene 60 l de aceite de oliva de 2,8 €/l para obtener una mezcla de 2,5 €/l.

6. Si Álvaro regala a Rita 4 de sus discos, ella tendrá el doble que él. Si Rita da 6 de sus discos a Álvaro, entonces será él el que tenga el doble que ella. ¿Cuántos discos tiene cada uno?

7. Varios amigos están jugando a los chinos con monedas de 5 y 50 céntimos. Al abrir las manos cuentan 8 monedas con un valor de 130 céntimos. ¿Cuántas monedas hay de cada clase?

TEMA 8. FUNCIONES Y GRÁFICAS

<u>Una Función es</u> una relación de causa-efecto entre dos cantidades matemáticas: a iguales causas, iguales efectos. La causa se denomina **variable independiente** y se denota con la letra ***x***. El efecto es la **variable dependiente**, que se indica con la letra ***y*** (Frecuentemente, en lugar de la letra ***y*** se utiliza la expresión ***f(x)*** ó ***g(x)***, ...)

La función asocia a cada valor de x un único valor de y.

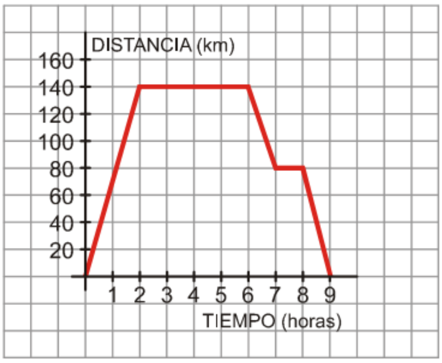
<u>Representación Gráfica</u>. Se representa sobre unos ejes cartesianos. La variable x sobre el eje horizontal (eje de abcisas) y la variable y sobre el eje vertical (eje de ordenadas).

Cada pareja de valores de las variables dependiente e independiente se representa mediante un punto ***(x,y)*** en el sistema de coordenadas.

<u>Dominio de definición la función</u> es el conjunto de valores de x para los cuales hay valores de y **(conjunto de valores de *x* que tienen imagen).**

1- DEFINICIONES. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

1.- La siguiente gráfica representa una excursión en autobús de un grupo de estudiantes, reflejando el tiempo (en horas) y la distancia al instituto (en kilómetros):



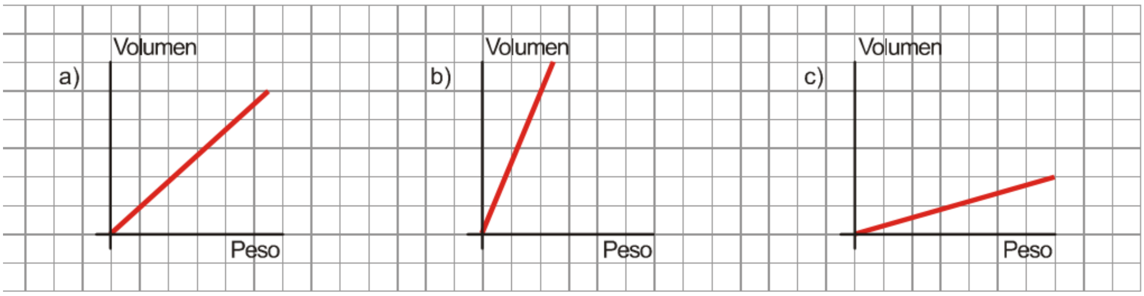
a) ¿A cuántos kilómetros estaba el lugar que visitaron?

b) ¿Cuánto tiempo duró la visita al lugar?

c) ¿Hubo alguna parada a la ida? ¿Y a la vuelta?

d) ¿Cuánto duró la excursión completa (incluyendo el viaje de ida y el de vuelta)?

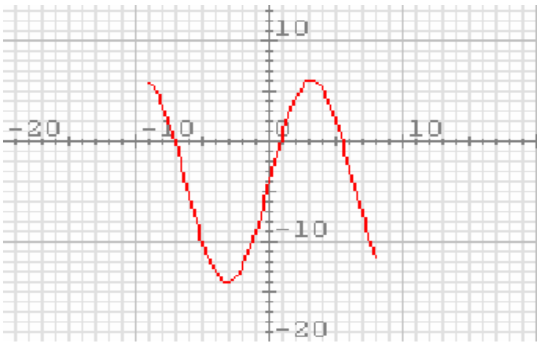
2.- Une cada materia con la gráfica que relaciona su peso con su volumen. Da una breve explicación de por qué es así.

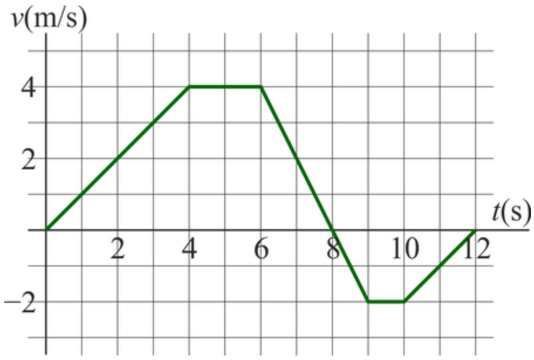


1. Garbanzos 2. Algodón 3. Plomo

3.- Construye una gráfica que se ajuste al siguiente enunciado: Esta mañana, Eva fue a visitar a su amiga Leticia y tardó 20 minutos en llegar a su casa, que se encuentra a 800 metros de distancia. Estuvo allí durante media hora y regresó a su casa, tardando en el camino de vuelta lo mismo que tardó en el de ida.

4.- Determina el dominio y el recorrido (imagen) de las siguientes funciones:





2- VARIACIONES DE UNA FUNCIÓN

Monotonía de una Función (Crecimiento y Decrecimiento).

- Una función es **creciente** en un punto si, alrededor de ese punto, cuando aumenta el valor de la variable independiente (x) aumenta el valor de la variable dependiente (y)

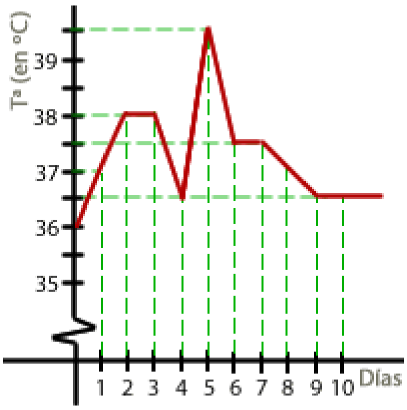
  Si una función es creciente en un punto entonces, alrededor de él, la gráfica, vista de izquierda a derecha, asciende.

- Una función es **decreciente** en un punto si, alrededor de ese punto, cuando aumenta el valor de la variable independiente (x) disminuye el valor de la variable dependiente (y) Si una función es decreciente en un punto entonces, alrededor de él, la gráfica, vista de izquierda a derecha, desciende.
- Si la función toma el mismo valor alrededor de un punto (la gráfica se mantiene sin subir ni bajar), entonces se dice que allí la función es **constante**.

Extremos de un Función.

- Una función tiene un **máximo local o relativo** en un punto cuando su ordenada es mayor que la ordenada de los puntos que le rodean. A la izquierda del máximo la función es creciente y a su derecha decreciente.
- Una función tiene un **mínimo local o relativo** en un punto cuando su ordenada es menor que la ordenada de los puntos que le rodean. A la izquierda del máximo la función es decreciente y a su derecha creciente.
- Se llama **máximo absoluto** de una función al punto más alto de la gráfica y llamamos **mínimo absoluto** al punto más bajo

5.- La siguiente gráfica refleja la temperatura de un enfermo durante diez días.



a) Indica en qué tramos crece la temperatura y en qué tramos decrece.

b) Señala el máximo, indicando en qué momento se produce y qué temperatura alcanza el enfermo.

c) Señala el mínimo, indicando en qué momento se produce y qué temperatura alcanza el enfermo.

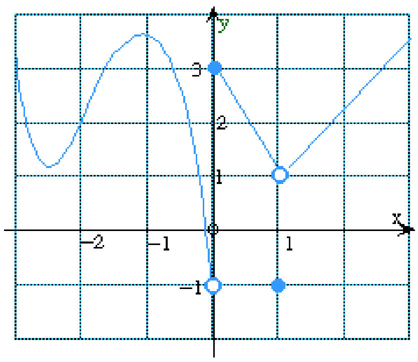
3- TENDENCIA DE UNA FUNCIÓN: CONTINUIDAD, PERIODICIDAD y COMPORTAMIENO A LARGO PLAZO

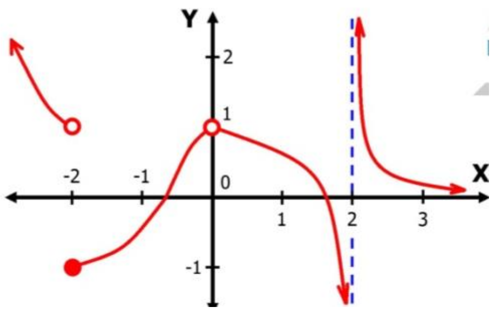
Continuidad. Discontinuidad. Una función es **continua** cuando su gráfica se puede trazar sin levantar el lápiz del papel (la gráfica de la función no presenta saltos). Los saltos bruscos que presenta la gráfica de la función se denominan **discontinuidades de la función**.

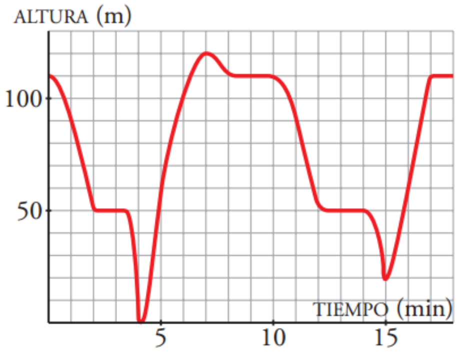
Funciones Periódicas: son aquellas cuyo comportamiento se va repitiendo cada vez que la variable independiente recorre un intervalo determinad. A la longitud de ese intervalo se le denomina **periodo de la función**.

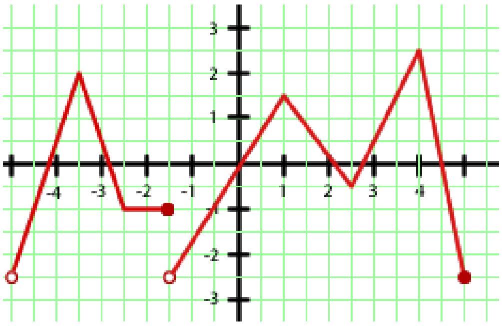
6.- Indica que funciones son continuas y cuáles discontinuas. En el caso de las discontinuas señala en que puntos presenta discontinuidad.

Indica también el dominio, recorrido, los tramos donde la función es creciente y los tramos donde es decreciente y los máximos y mínimos locales que presenta.

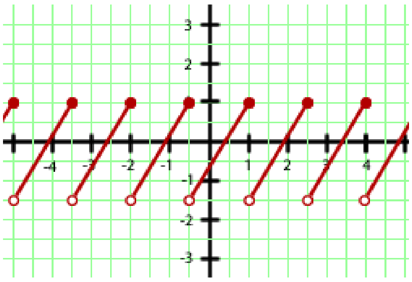


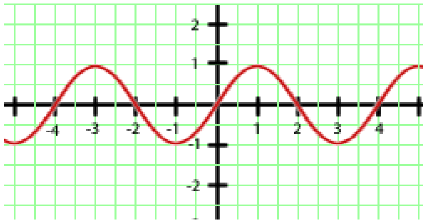




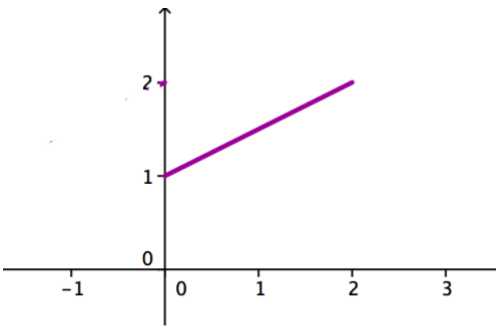


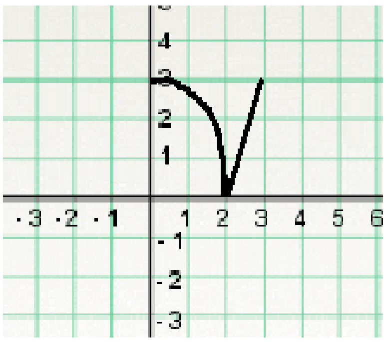
7.- Indica el periodo de las siguientes gráficas:





8.- Completa la gráfica de las siguientes funciones sabiendo que se ha representado un periodo.

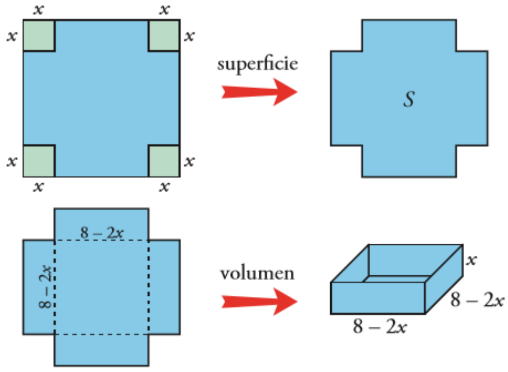




4- EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UNA FUNCIÓN

Una expresión analítica de una función es una expresión algebraica que relaciona dos variables.

9.- Disponemos de una cartulina cuadrada de 8 dm de lado. Cortamos cuadraditos de lado x en las esquinas, tal como se indica en la figura y queremos saber la superficie que queda.



Para obtener la expresión analítica de la superficie S, resta del área del cuadrado el área de los cuadraditos cortados.

a) ¿Cuál es la expresión de la superficie S?
b) B) ¿Cuál es su dominio definición?.
c) C) ¿Y el volumen de la caja que se puede formar?.

10.- La siguiente tabla recoge la medida del perímetro del cráneo de un niño en los primeros meses de vida:

TIEMPO (meses)	0	3	9	15	21	27	33
PERÍMETRO (cm)	34	40	44	46	47	48	49

a) Dibuja la gráfica que relaciona estas dos variables.
b) ¿Qué tendencia se observa en el crecimiento del cráneo del niño?
c) ¿Cuánto crees que medirá el perímetro craneal del niño a los 3 años?.

11.- Haz una tabla de valores en la que se relacionen la base y la altura de los rectángulos cuya área sea $12m^2$. Representa gráficamente esta función.

Cuál de estas tres expresiones $y = \frac{x}{12}$ $\quad y = \frac{12}{x}$ $\quad y = 12x$ corresponde a esta función

TEMA 9. FUNCIONES LINEALES

1- FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD: Y=MX

Se representa mediante una recta que pasa por el punto (0,0), es decir, por el origen de coordenadas. Para representarla solo necesitaremos obtener otro punto de la recta, lo cual se consigue dando un valor a x y obteniendo el correspondiente valor de y.

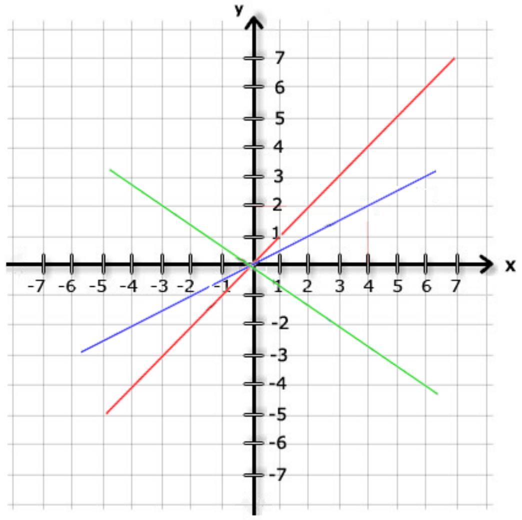
Al valor m se le llama pendiente de la recta y nos indica la inclinación de la recta.

Si la gráfica de una función es una **recta que pasa por el origen de coordenadas**, entonces es la gráfica de una función de proporcionalidad y=mx. Para determinar su ecuación sólo necesitamos hallar el valor de m.

1.- Representa las siguientes funciones:

a) y=2x b) $y=\frac{2}{3}x$ c) y=-3x d)y= -x

2) Halla las ecuaciones de las rectas siguientes:



2- FUNCIÓN AFÍN: y=mx+n.

Se representa por una recta que pasa por el punto de coordenadas (0,n), por lo que a n se le llama la ordenada en el origen de la función, ya que es el valor de la ordenada cuando x=0. Para representar la un función afín sólo necesitamos obtener otro punto de la recta, lo cual se consigue dando un valor a x y obteniendo el correspondiente valor de y.

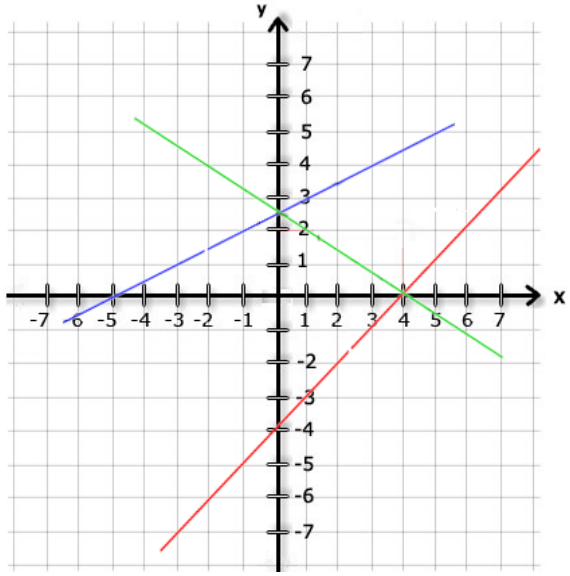
El valor m sigue siendo la pendiente de la recta que nos indica su inclinación.

Si m=0, entonces la función pasa a ser y=n y es una función constante porque siempre vale lo mismo y su gráfica es la recta paralela al eje de abcisas (eje OX) que pasa por el punto (0,n)

3.- Representa las rectas de ecuaciones:

a) y=2x-3   b) y=3x+5   c) y= -x+1   d) $y=-\frac{2}{3}x$

4.- Halla las ecuaciones de las rectas siguientes y di cuál es su pendiente:



3- ECUACIÓNES DE LA RECTA

1.- Conocemos su pendiente y un punto por el que pasa: Si la recta **pasa por** el punto **A(x_0,y_0)** y tiene por **pendiente m** entonces su ecuación es de la forma **$y-y_0=m(x-x_0)$.**

2.- Conocemos dos puntos por los que pasa: Si la recta **pasa** por dos puntos **A(a_1,a_2)** y **B(b_1,b_2)** entonces $m=\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}$ su ecuación es de la forma

$$y-a_2=\left(\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}\right)\cdot(x-a_1)$$

5.- Escribe la ecuación de la recta en los siguientes casos:

a) Pasa por el punto P(1,2) y tiene por pendiente m=2

b) Pasa por el punto P(-1,0) y tiene por pendiente m= -2

c) Pasa por los puntos p(1,1) y Q(-2,4)

d) Pasa por los puntos p(0,-1) y Q(-2,-1)

e) Tiene pendiente -2 y corta al eje Y en el punto (0, 3)

f) Pasa por P(3,2) y es paralela a la recta 2x-3y+5=0

6.- La función afín $y=0,5x+25$ relaciona el precio en € de la factura de la luz en función de los Kw de electricidad consumida.

a) ¿Cuánto me cobran de mínimo en la factura?

b) Si he consumido 20 Kw de electricidad, ¿cuánto me van a cobrar?

c) ¿cuántos Kw de luz he consumido si la factura ha sido de 50€?

7.- La tarifa del alquiler de una motosierra es de 12€ el primer día y 7€ por cada día posterior.

a) Escribe la función afín que relaciona los días de alquiler con el precio cobrado.

b) ¿Cuánto me cobrarán si alquilo la motosierra 10 días?

c) Cuántos días he alquilado la motosierra si me han cobrado 68€

8.- Por el alquiler de un coche me cobran un fijo más una cantidad en función de los kilómetros recorridos.

a) Si a Ana por recorrer 400 km le han cobrado de alquiler 130€ y a María por recorrer 100km le han cobrado 70€, encuentra la función afín que relaciona el precio de alquiler con los kilómetros recorridos.

b) Calcula cuánto me cobrarán por alquilar un coche si voy a recorrer 800km

c) ¿Cuántos km he recorrido con un coche de alquiler si me han cobrado 150€

d) Representa en unos ejes la función obtenida.

9.- Juan quiere contratar una póliza a todo riesgo para su vivienda. Estudia dos ofertas.

La primera es de la compañía A que le cobraría 400€ el primer año, con un descuento de 50€ por año durante los cinco siguientes, y a partir de ahí la cuota sería fija.

La segunda es la compañía B que le cobrarían 300€ el primer año, con un descuento de 25€ por año, hasta el cuarto y, a partir de este, no habría más reducciones.

Juan quiere investigar qué oferta le es más ventajosa para los próximos 10 años.

a) Construye las tablas que relacionan el tiempo transcurrido, t, con el coste de la póliza, C, para los próximos 10 años. Dibuja, en los mismos ejes, las gráficas para ambos casos.

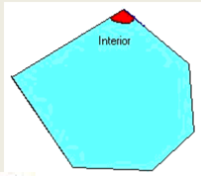
b) Encuentra la expresión analítica que relaciona t con C en ambos casos. ¿En qué momento se igualan ambas cuotas?

c) Calcula cuánto pagaría Juan durante los 10 primeros años en cada compañía. ¿Cuál debería elegir?

TEMA 10 PROBLEMAS MÉTRICOS EN EL PLANO

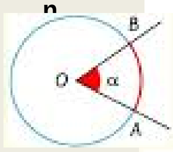
1- RELACIONES ANGULARES

Ángulos en los polígonos



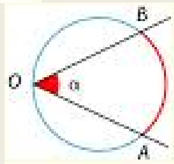
- **Suma** de los **ángulos interiores** de un polígono de n lados **180º(n-2)**
- **Medida** de cada **ángulo interior** de un n-ágono regular $\dfrac{180^\circ(n-2)}{n}$

Ángulos en la circunferencia



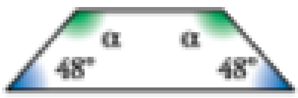
- **Ángulo central** es el que tiene un vértice común y sus lados son dos radios

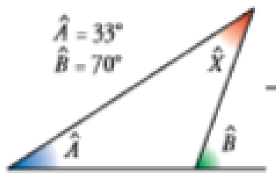
Arco AB = Ángulo AOB



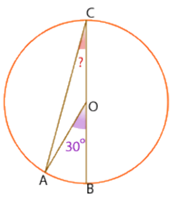
- **Ángulo inscrito** es el que tiene un vértice en la

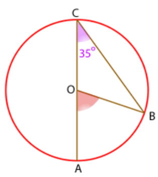
1. Calcula los ángulos desconocidos en estas figuras:

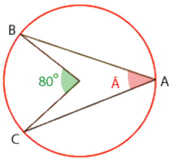


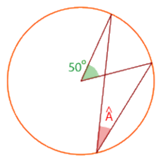


2. Calcula el valor del ángulo que falta en cada una de las circunferencias siguientes

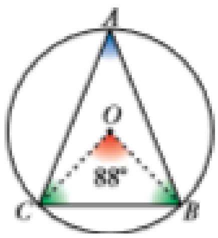






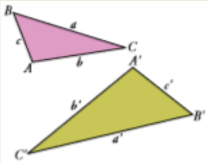


3. El triángulo ABC es isósceles. ¿Cuánto miden sus ángulos?



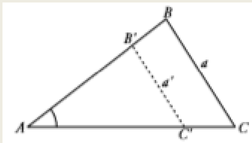
2- SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos **triángulos semejantes** tienen: Sus lados proporcionales $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a'}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b'}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c'}}$



Su ángulos respectivamente iguales: $\hat{A} = \widehat{A}'$ $\hat{B} = \widehat{B}'$ $\hat{C} = \widehat{C}'$

Si dos triángulos se pueden colocar de forma que compartan un ángulo y los lados opuestos sean paralelos están en **posición de Tales.**
Dos triángulos en posición de Tales son semejantes.

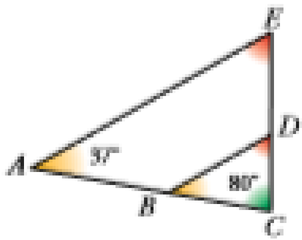


Criterios de semejanza

- Tienen dos ángulos iguales $\hat{A} = \widehat{A}'$ $\hat{B} = \widehat{B}'$
- Sus lados son proporcionales $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a'}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b'}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c'}}$
- Tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido igual $\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b'}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c'}}$ y $\hat{A} = \widehat{A}'$

4.- Si BD es paralelo a AE, y $\overline{AC} = 15cm, \overline{CE} = 11cm, \overline{BD} = 6'6cm, \overline{AE} = 18cm$:

a) Calcula $\overline{CD}$ y $\overline{BC}$



b) Si $\hat{A} = 37°$ y $\hat{C} = 80°$, halla $\hat{E}$, $\hat{B}$ y $\widehat{D}$.

3- TEOREMA DE PITÁGORAS. APLICACIONES

Teorema de Pitágoras: En los triángulos rectángulos la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa”

$$c^2 = b^2 + a^2$$

Para calcular el lado de un triángulo rectángulo conocido los otros dos lados tendremos que hacer:

- **hipotenusa** $c = \sqrt{b^2 + a^2}$
- **cateto** $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ ó $a = \sqrt{c^2 - b^2}$

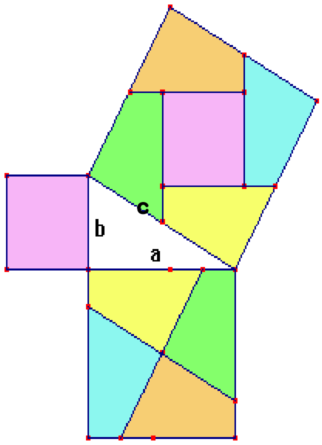
Tipo de triángulos

a, b, c son los lados de un triángulo, y **c** es el mayor.

-Si $b^2 + a^2 = c^2$, el triángulo es rectángulo.

-Si $b^2 + a^2 < c^2$, el triángulo es obtusángulo.

-Si $b^2 + a^2 > c^2$, el triángulo es acutángulo.



5.- En cada uno de los siguientes casos, se facilita la medida de los tres lados de un triángulo. Determina cuáles de ellos son rectángulos, obtusángulos o acutángulos.

a) 12cm, 16cm y 20cm

b) 13m, 12m y 10m

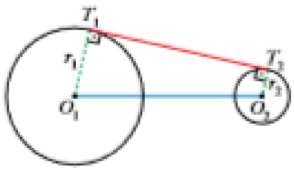
c) 5cm, 10cm y 6cm

d) 8mm, 5mm y 5mm

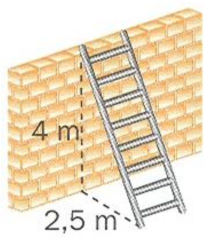
e) 11m, 61m y 60m

f) 40cm, 41cm y 9cm

6.- r_1=15cm, r_2=6cm, $\overline{O_1O_2}$=41cm. Halla la longitud del segmento T_1T_2

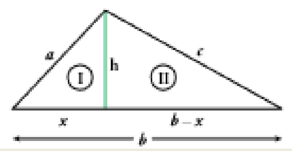


7.- Una escalera está apoyada sobre una pared y llega hasta una altura de 4 metros. El pie de la escalera está a 2’5 metros de la pared. ¿Cuánto mide la escalera?



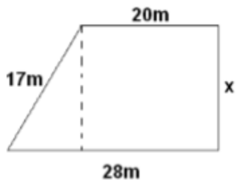
4- APLICACIÓN ALGEBRAICA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

La altura del triángulo grande termina dos triángulos rectángulos. Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos I y II y planteando el sistema de ecuaciones adecuado podemos obtener h, además de x.

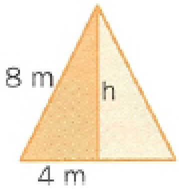


8.- Halla la medida que se pide en cada caso:

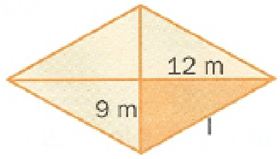
a) La altura de un trapecio rectángulo



b) La altura del triángulo equilátero



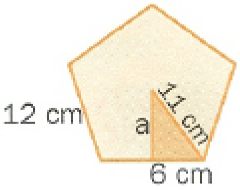
c) El lado del rombo



d) La apotema del pentágono

9.- El dormitorio de Pablo es rectangular; su lado mayor mide 8 metros y su perímetro total mide 28 metros. Ha decidido dividirlo en dos partes triangulares con una cortina que une dos vértices opuestos. ¿Cuántos metros deberá medir la cortina?

10.-



Halla la altura de un trapecio isósceles de bases 4 y 6 centímetros, y lados iguales de 5 centímetros.

5- LUGARES GEOMÉTRICOS

Lugar geométrico conjunto de puntos que cumplen una cierta propiedad

Mediatriz de un segmento. Lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus extremos

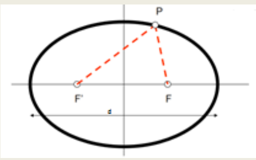
Bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus lados

Arco capaz del ángulo α para el segmento AB al lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve el segmento AB bajo un ángulo α

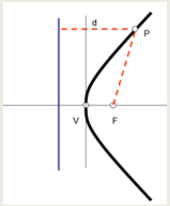
6- LAS CÓNICAS COMO LUGARES GEOMÉTRICOS

Circunferencia lugar geométrico de los puntos P cuya distancia a O es r: $\overline{OP} = r$

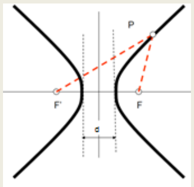
Elipse lugar geométrico de los puntos P cuya suma de distancias a F y a F' es igual a d: $\overline{PF} + \overline{PF'} = d$



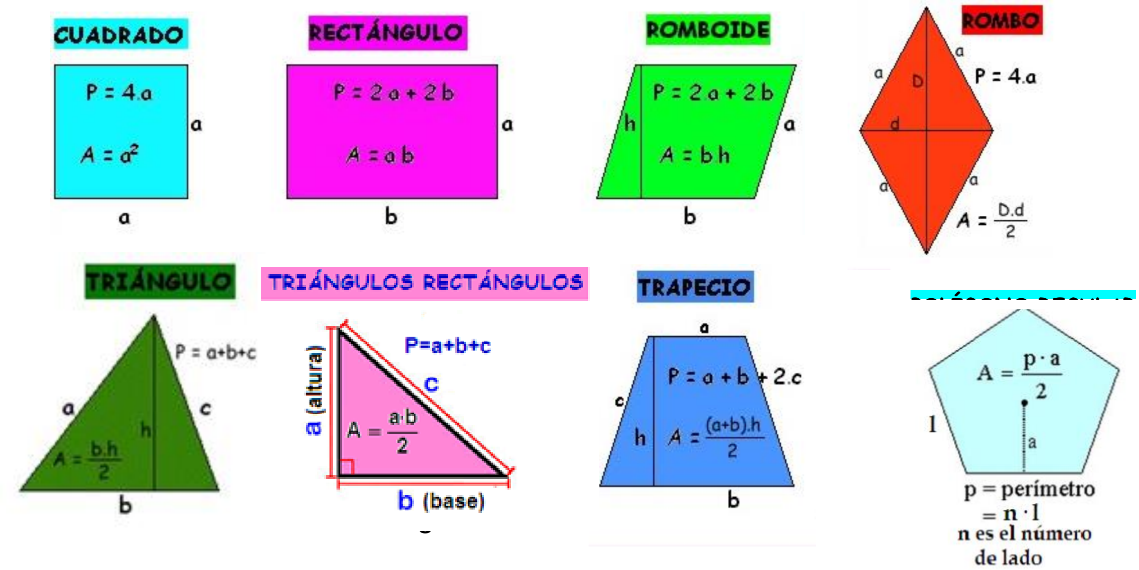
Parábola lugar geométrico de los puntos, P, que equidistan de F y de d: $\overline{PF} = \mathrm{dist}(P, d)$



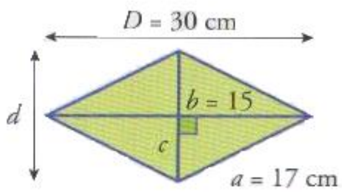
Hipérbola lugar geométrico de los puntos, P, cuya diferencia de distancias a los focos (en valor absoluto) es d: $\left|\overline{PF} - \overline{PF'}\right| = d$



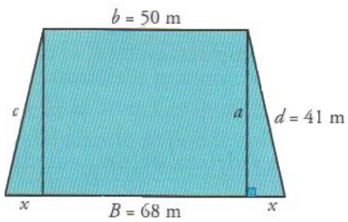
7- ÁREAS DE LOS POLÍGONOS



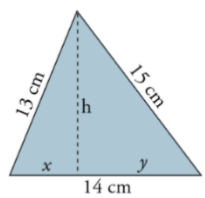
11.- En un rombo el lado mide 17cm, y la diagonal mayor, 30cm. Calcula el área y el perímetro.



12.- Las bases de un trapecio isósceles miden 68m y 50m. Los lados oblicuos miden 41m. Calcula el área del trapecio



13.- Halla el área del siguiente triángulo. Ayúdate de un sistema de ecuaciones para calcular los valores de h, x e y.



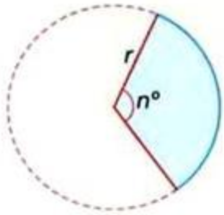
8- ÁREAS DE FIGURAS CURVAS

CÍRCULO. CIRCUNFERENCIA

$A = \pi r^2$

$P = 2\pi r$

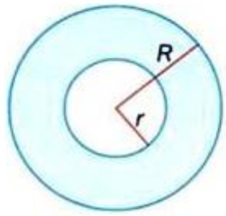
ARCO DE CIRCUNFERENCIA. SECTOR CIRCULAR



$$A = \frac{\pi r^2 \cdot n^\circ}{360^\circ}$$

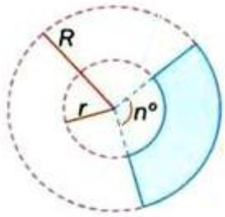
$$P = \frac{2\pi r \cdot n^\circ}{360^\circ}$$

CORONA CIRCULAR



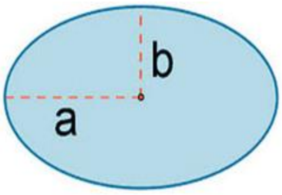
$A = \pi(R^2 - r^2)$

TRAPECIO CIRCULAR



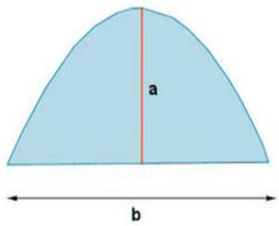
$$A = \frac{\pi(R^2 - r^2) \cdot n^\circ}{360^\circ}$$

ELIPSE



$A = \pi \cdot a \cdot b$

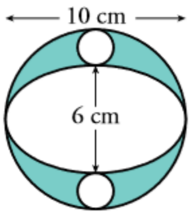
SEGMENTO DE PARÁBOLA



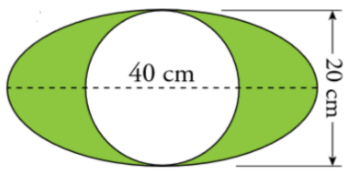
$$A = \frac{2}{3} \cdot a \cdot b$$

14.-Halla el área de la parte coloreada en las figuras siguientes:

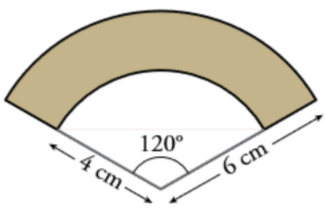
a)



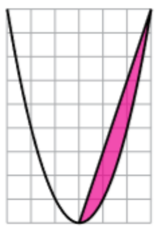
c)



b)

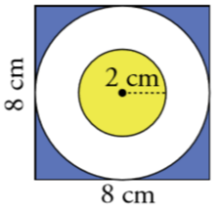


d)

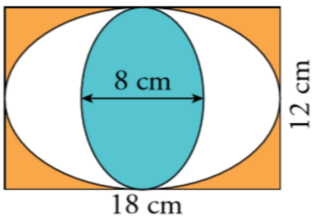


15.-Calcula el área de la zona coloreada en cada una de las siguientes figuras:

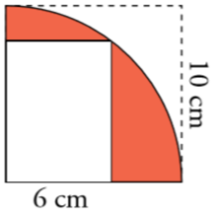
a)



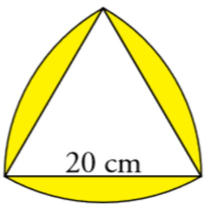
b)



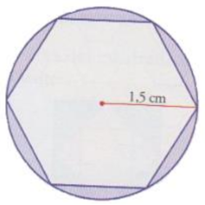
c)



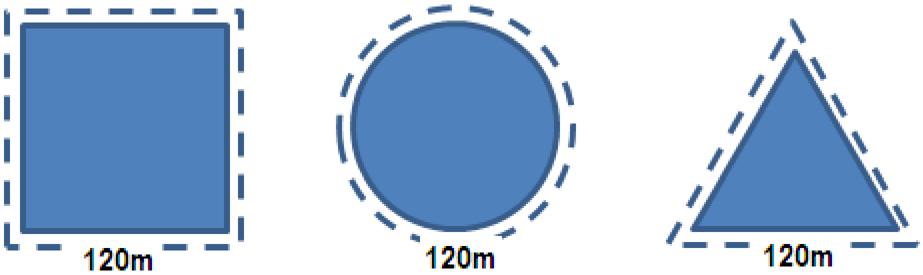
d)



e)

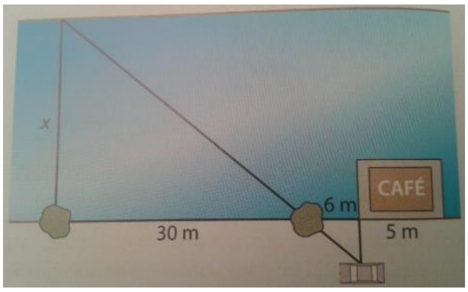


16.- Facundo tienen tres parcelas: una cuadrada, otra circular y otra con forma de triángulo equilátero. Quiere plantar nabos en la más grande y tomates en la más pequeña. Al medir los contornos ha comprobado que las tres tienen 120m. ¡Ayúdale!

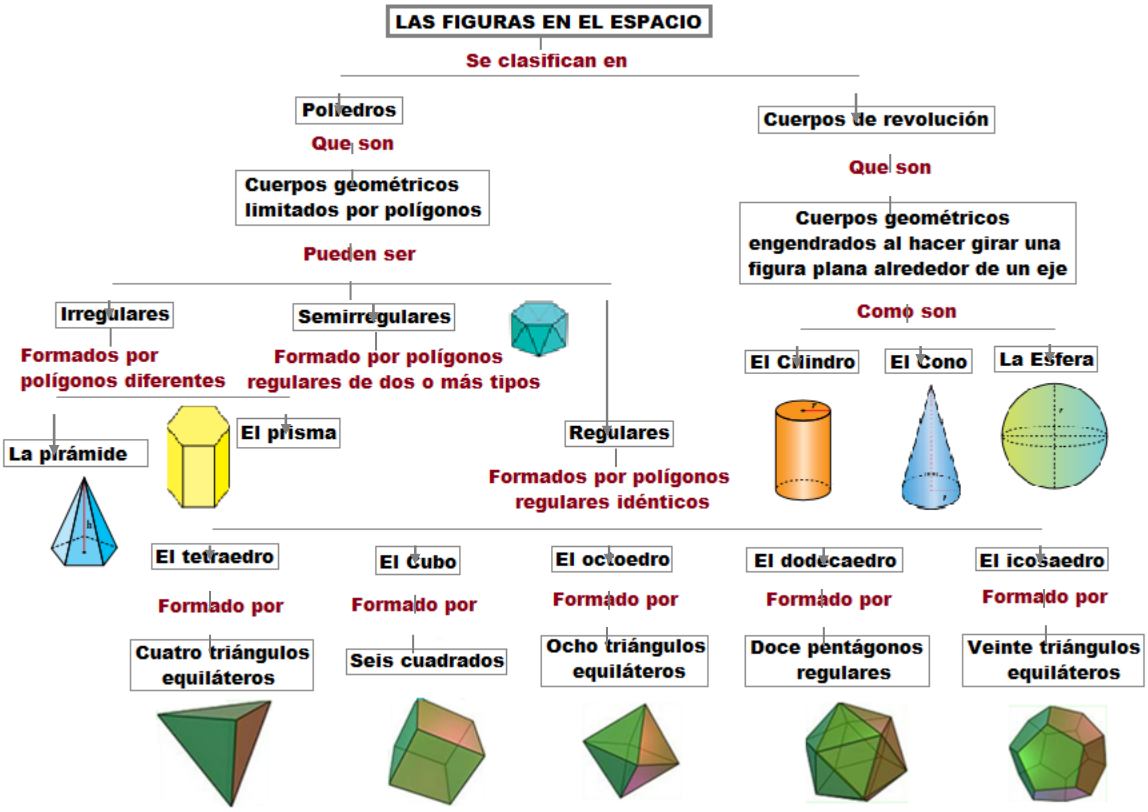


17.-Un jardinero quiere plantar césped en una plaza circular de 5m de radio que tiene una fuente circular de 2m de radio en el centro. Necesita saber cuántos metros cuadrados de césped va a plantar y cuántos metros de valla le hacen falta para cerrar la plaza y la fuente

18.- Queremos medir la anchura de un río sin necesidad de cruzarlo. Para ello observamos que dos árboles que se encuentran en la misma orilla que nosotros están separados por una distancia de 30m. A 6m del segundo árbol se encuentra una cafetería y nosotros hemos aparcado el coche a 5m de ella y perpendicular al río, tal y como indica la figura. ¿Cuál es la anchura del río?



TEMA 11: CUERPOS GEOMÉTRICOS



1.- Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. En las que sean falsas, explica por qué:

a) un cilindro es un poliedro.

b) En cada vértice de un poliedro concurren al menos tres caras.

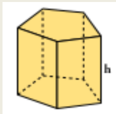
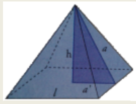
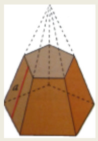
c) Una pirámide de base pentagonal es un poliedro

d) Un poliedro tiene al menos diez aristas.

e) Una pirámide de base cuadrada es un poliedro regular.

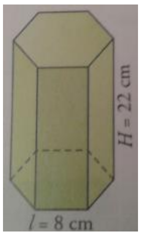
2.- Explica por qué las aristas de un poliedro semirregular tienen que ser todas iguales

1- ÁREAS Y VOLUMENES DE LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS

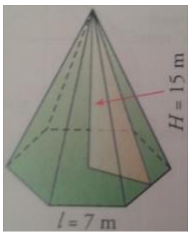
POLIEDROS	Prisma 	Pirámide 	Tronco de Pirámide 
Área lateral	$p \cdot h$	$\frac{p \cdot a}{2}$	$\frac{(p+p') \cdot a}{2}$
Área total	$A_{LAT}+2A_{BASE}$	$A_{LAT}+A_{BASE}$	$A_{LAT}+A_{BASE\ SUPERIOR}+A_{BASE\ INFERIOR}$
Volumen	$A_{BASE} \cdot h$	$\frac{A_{BASE} \cdot h}{3}$	$V_{PIRAMID\ MAYOR}- V_{PIRAMIDE\ MENOR}$

3.- Calcula el área total y el volumen de cada una de estas figuras:

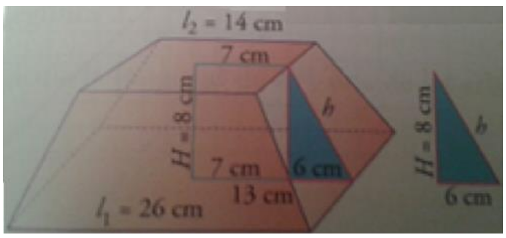
a)

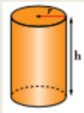
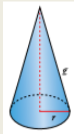
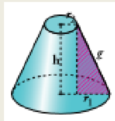
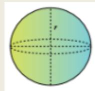


b)



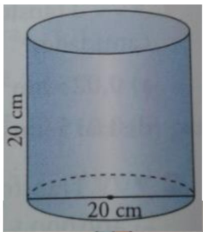
c)



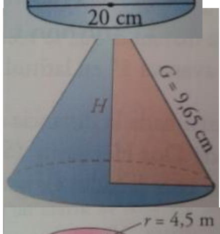
CUERPOS DE REVOLUCIÓN	Cilindro 	Cono 	Tronco de Cono 	Esfera 
Área lateral	$2\pi rh$	πrg	$\pi(r_1+r_2)g$	$4\pi r^2$
Área total	$A_{LAT}+2\pi r^2$	$A_{LAt}+\pi r^2$	$A_{LAT}+\pi r_1^2+\pi r_2^2$	
Volumen	$A_{BASE}\cdot h=\pi r^2 h$	$\frac{A_{BASE}\cdot h}{3}=\frac{\pi r^2 h}{3}$	$V_{CONO\ MAYOR}-V_{CONO\ MENOR}$	$\frac{4}{3}\pi r^3$

4.- Calcula el área total y el volumen de cada una de estas figuras:

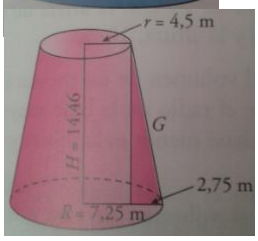
a)



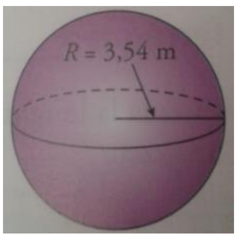
b)



c)



d)

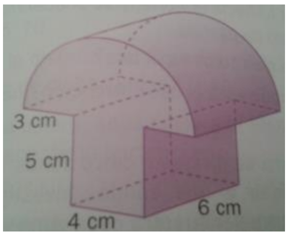


5.- Supongamos que un bote de conservas es totalmente cilíndrico y que el diámetro de la base mide 10cm. Si tiene una capacidad de 1L, ¿cuánto medirá la altura?

6.- Una piscina tiene forma de prisma hexagonal. La arista de su base mide 12m y la altura tiene 3’5m ¿Cuánto costará llenarla si el litro de agua tiene un precio de 0’02€?

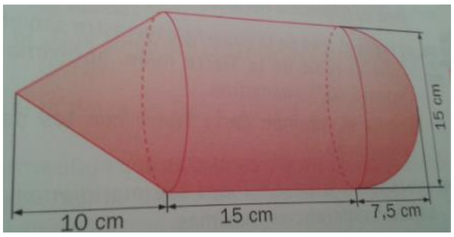
7.- Calcula el área y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:

a)



b)

8.- Los tejados de las antiguas pallozas romanas, existentes aún en Asturias y León (parque natural de los Ancares), tienen forma cónica

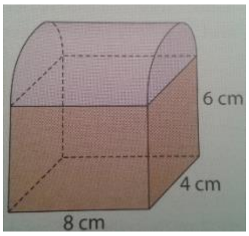


a) Calcula la superficie de una de ellas si la longitud de la circunferencia de la base es de 9’42m y su altura es de 2m.

b) Calcula el área lateral de la palloza si su altura total es de 5m.

c) Calcula el volumen de la palloza.

9.- Calcula el área total y el volumen de un joyero como el de la figura.



TEMA 12. ESTADÍSTICA

1. INTRODUCCIÓN.

La **estadística** es la ciencia que se encarga de recopilar y ordenar datos referidos a diversos fenómenos para su posterior análisis e interpretación.

Tiene su origen en la necesidad de los Estados (países) de conocer datos de su población (censos de población).

2. POBLACIÓN Y MUESTRA.

Población: Conjunto de todos los elementos que son objeto de estudio

Muestra: Subconjunto extraído de la población.

Individuo: Cada uno de los elementos de la población o la muestra.

Tamaño: Número de elementos de la población o la muestra.

1. Señala en cada caso si es más conveniente estudiar la población o una muestra:
   a. La longitud de los tornillos que fabrica una máquina.
   b. La estatura de todos los turistas de una ciudad en un año.
   c. El peso de cinco amigos.

2. Un instituto tiene 720 alumnas y 480 alumnos. Queremos elegir una muestra formada por 40 estudiantes. ¿Cuál es la más representativa?
   a. Los 40 estudiantes que llegan primero el lunes al centro.
   b. 40 alumnos de 1º ESO elegidos al azar.
   c. 24 alumnas y 16 alumnos elegidos al azar.

3. Escribe la población, la muestra y sí es representativa o no en los siguientes estudios estadísticos:
   a. En una frutería tocamos 5 aguacates para comprobar su dureza.
   b. Hablo con 10 amigos míos de política para saber quién ganará las elecciones.
   c. Ojeo 10 páginas de un libro para saber si me gustan las ilustraciones.
   d. Tomo café en 4 bares de mi barrio para saber el precio de un café en España.

3. VARIABLES ESTADÍSTICAS.

Una variable estadística es cualquier propiedad que se puede estudiar en una población. Pueden ser:

- Cualitativa: La propiedad no se puede medir: Sexo, color de pelo, música preferida, tipo de comida, etc
- Cuantitativa: La propiedad sí se puede medir: Peso, altura, número de hermanos, salario, etc. Hay dos tipos:
  1. Discreta: Solo toma valores "aislados": 5 hermanos, 3 habitaciones,..
  2. Continua: Puede tomar cualquier valor en un intervalo: 1,75 metros, 75,36 kg,...

4. Determina de qué tipo son las siguientes variables estadísticas:
    a. Año de nacimiento.
    b. Color de pelo.
    c. Profesión de una persona.
    d. Perímetro torácico.
    e. Estado civil.
    f. Equipo de fútbol preferido.
    g. Lugar de nacimiento.
    h. Número de veces que se ha viajado en avión.
    i. Número de hermanos.
    j. Superficie de una casa.
    k. Número de habitaciones de una casa.
    l. Consumo de gasolina cada 100 km.
    m. Tipo de película (comedia, acción,..) que proyecta una sala de cine.
    n. Duración de una película.
    o. Premios Goya que tiene una película.
    p. Marca de un teléfono.
    q. Precio de un teléfono.
    r. Número de teléfonos en una familia.

4. FRECUENCIAS Y TABLAS.

La **frecuencia absoluta** $\boldsymbol{f_i}$ de un dato x_i es el número de veces que aparece.

La **frecuencia relativa** $\boldsymbol{h_i}$ de un dato x_i es el cociente: $\frac{f_i}{N}$

La suma de las frecuencias absolutas es el número total de datos, N.

La suma de las frecuencias relativas es igual a la unidad.

5. El número de consultas al dentista de un grupo de 30 alumnos en el último año ha sido:

1	0	2	0	1	3	0	2	1	0
0	4	3	2	1	3	0	2	1	0
0	2	1	2	0	1	3	1	0	1

Calcula las frecuencias absolutas y relativas.

6. La talla de calzado de 20 personas es:

43	42	41	39	41	38	40	43	44	40
39	39	38	41	40	39	38	39	39	40

Completa la siguiente tabla:

Dato x_i	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia relativa h_i	Porcentaje %
Total	20	1	100 %

7. El número de horas diarias que trabajan con el ordenador 20 personas es:

3	3	5	6	2	3	2	2	4	5
0	2	2	0	3	3	3	2	2	5

Elabora una tabla de frecuencias como la del ejercicio anterior.

8. Se ha realizado una encuesta a 600 chicos y chicas que acuden a un polideportivo sobre su deporte favorito. Los resultados han sido los siguientes: Fútbol (40 %) Atletismo (18 %) Baloncesto (12 %) Pádel (26%) Ciclismo (4%) Halla las frecuencias absolutas y relativas correspondientes a cada deporte.

Si la variable es continua o discreta con muchos valores distintos conviene agruparlos en intervalos.

Se llama **marca de clase** al punto medio de cada intervalo.

9. Se ha tomado el tiempo en los 100m lisos a los miembros de un club de atletismo, con los siguientes resultados:

11,62	12,03	12,15	11,54	10,95	11,56	11,08	11,38	12,08	11,73
12,11	11,52	11,72	11,23	11,66	10,87	11,32	11,58	12,01	11,06

Haz una tabla de frecuencias con estos intervalos:

Intervalo	Marca de clase x_i	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia relativa h_i	Porcentaje %
10,805-11,075				
11,075-11,345				
11,345-11,615				
11,615-11,885				
11,885-12,155				
Total				

10. Los resultados de un test de inteligencia realizado a 20 personas han sido:

100	80	92	101	65	72	121	68	75	93
101	100	102	97	89	73	121	114	113	94

Elabora la tabla de frecuencias, tomando intervalos de amplitud 10.

11. Las llamadas telefónicas de una empresa un determinado día han tenido la siguiente duración:

120	131	142	157	15	27	57	62	12	49
58	169	201	54	212	66	39	48	234	78
89	100	111	200	88	73	7	15	22	39
180	199	36	44	12	21	44	115	250	93
42	125	21	147	82	103	39	173	37	78
74	46	33	122	18	114	91	55	144	169

Agrupa los datos en 8 clases (intervalos) y elabora la tabla de frecuencias.

- La **frecuencia absoluta acumulada $\boldsymbol{F_i}$** de un dato x_i es la suma:

$$F_i = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_i$$

- La **frecuencia relativa acumulada $\boldsymbol{H_i}$** de un dato x_i es la suma:

$$H_i = h_1 + h_2 + h_3 + \cdots + h_i$$

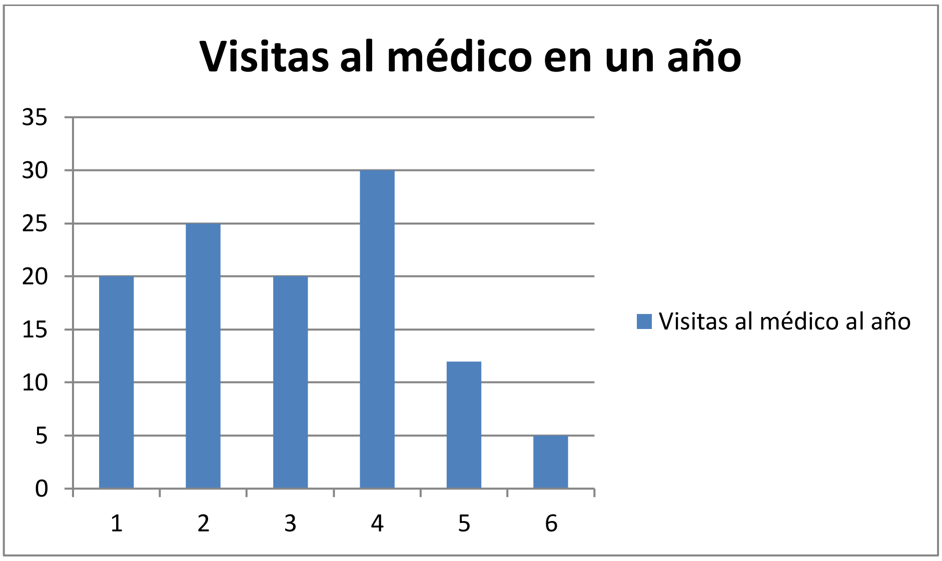
12. Calcula las frecuencias absolutas y relativas acumuladas de los ejercicios 5,6,7,8,9 ,10 y 11.

5. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS.

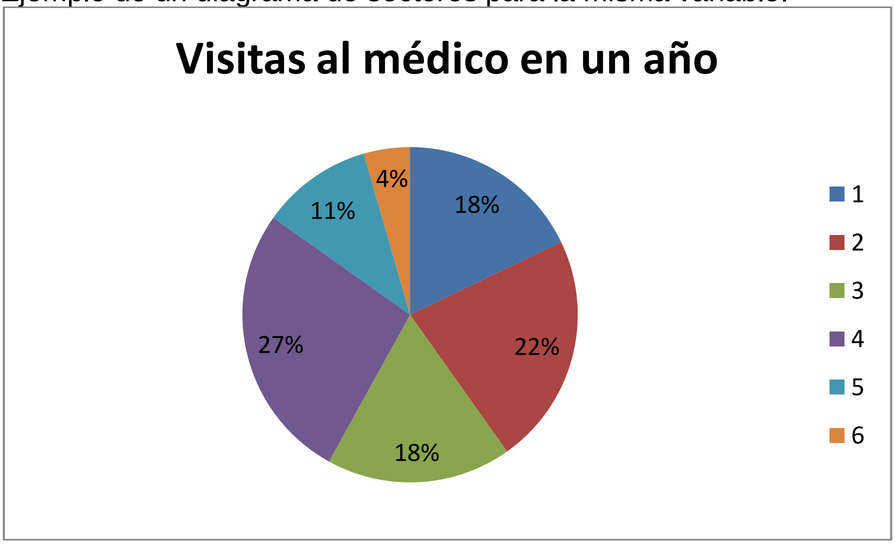
Los datos estadísticos se suelen expresar de forma gráfica ya que, de un vistazo, podemos hacernos una idea de su distribución.

- Diagrama de barras: Se utiliza para distribuciones de variables cuantitativas o cualitativas discretas.
- Histograma de frecuencias: Se utiliza para representar datos agrupados en clases.
- Diagrama de sectores: Es un círculo dividido en sectores, uno para cada dato o intervalo.

Ejemplo de un diagrama de barras: Visitas al médico en un año de un determinado número de personas.



Ejemplo de un diagrama de sectores para la misma variable.



13. Representa con un diagrama de barras y con un diagrama de sectores los datos de los ejercicios 5,6,7 y 8. Traza el polígono de frecuencias.

14. Representa con un histograma de frecuencias y con un diagrama de sectores los datos de los ejercicios 9,10 y 11. Traza el polígono de frecuencias.

6. PARÁMETROS ESTADÍSTICOS.

Al principio la estadística se preocupaba solo de recopilar y organizar datos. Más adelante al querer analizar dichos datos (para descubrir relaciones, sacar conclusiones, estimar probabilidades,...)surgió la necesidad de cuantificar numéricamente valores capaces de condensar información relativa al conjunto de datos. A esos valores se les denomina **parámetros estadísticos**.

I. PARÁMETROS DE CENTRALIZACIÓN

- Media aritmética, $\boldsymbol{\bar{x}} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3 + \cdots + f_n \cdot x_n}{N}$
- Moda, **Mo**: Es el valor de la variable, o marca de clase, que tiene mayor frecuencia.
- Mediana, **Me:** Es el valor que ocupa la posición central de los datos después de ordenarlos, o la media de los dos valores centrales en el caso de que el número de datos sea par.

Ejemplo: Los resultados del número de problemas bien resueltos en un examen por 10 alumnos es: 1,0,3,4,5,2,3,4,4,4. Calcular $\bar{x}$, Mo y Me.

$$\bar{x} = \frac{1+0+3+4+5+2+3+4+4+4}{10} = \frac{1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 4\cdot 4 + 1\cdot 5}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

$Mo = 4$ porque es el valor con mayor frecuencia.

Para calcular Me ordenamos los datos de menor a mayor: 0,1,2,3,3,4,4,4,4,5

Los datos centrales (al ser par el número total) son 3 y 4. Por tanto Me= 3,5.

15. Los pesos en kg de los soldados de un cuartel vienen dados por la tabla:

Peso	f_i
(60-65)	7
(65-70)	12
(70-75)	16
(75-80)	11
(80-85)	5
(85-90)	4

Calcula la media aritmética, la moda y la mediana de los datos anteriores.

16. El número de libros leídos por los miembros de una asociación son:

Número de libros	1	2	3	4	5	6	7
Número de personas	5	12	18	11	7	4	1

Halla la media aritmética, la moda y la mediana de los datos anteriores.

17. Escribe una tabla de frecuencias que cumpla $\bar{x}$ sea igual a 10.

18. Escribe una tabla de frecuencias que cumpla que Mo sea 20.

19. Escribe una tabla de frecuencias que cumpla que Me sea 1.

II. PARÁMETROS DE POSICIÓN.

- Los cuartiles Q_1, Q_2, Q_3 son medidas que separan los datos en 4 partes iguales, es decir, en cada tramo está el 25% de los datos recogidos. Observa que Q_2 coincide con Me.

Ejemplo: Tenemos 34 alumnos distribuidos por edades, calcular los cuartiles:

Edad (x_i)	f_i	F_i
12	2	2
13	6	8
14	8	16
15	7	23
16	5	28
17	3	31
18	2	33
19	1	34

Q_1=14 años ya que $\frac{34}{4} = 8{,}5$

Q_2=15 años ya que $\frac{34}{2} = 17$

Q_3=16 años ya que $\frac{34}{3} = 25{,}5$

20. Calcula los cuartiles de los ejercicios 15 y 16.

21. En unas oposiciones hay 200 personas presentadas para 50 plazas convocadas. Los resultados son:

Notas	3	4	5	6	7	8	9	10
Opositores	6	25	34	42	50	27	13	3

Calcula los cuartiles. ¿Que indicará Q_3?

III. PARÁMETROS DE DISPERSIÓN

Las medidas de dispersión permiten conocer el grado de agrupamiento de los datos con respecto a las medidas de centralización.

- Rango o Recorrido: Diferencia entre el mayor y el menor valor de la variable
- Desviación Media: Es la media aritmética de las desviaciones de cada dato respecto a $\bar{x}$.
- Varianza: Es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones.
- Desviación típica: Es la raíz cuadrada positiva de la varianza
- Coeficiente de variación: Cociente entre la desviación típica y la media.

Cuanto menores son las medidas de dispersión, más concentrados están los datos.

A. RANGO O RECORRIDO $\boldsymbol{R = Max - Mín}$

22. Las notas de 10 alumnos de 3º ESO son: 3,5,4,4,6,8,8,5,3,5. Calcula el recorrido.

23. Calcula R del ejercicio 21.

B. DESVIACIÓN MEDIA $\boldsymbol{DM = \frac{\sum f_i \cdot |x_i - \bar{x}|}{N}}$

24. Calcula DM de los ejercicios 21 y 22.

C. VARIANZA $\boldsymbol{\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \bar{x}^2}$

25.Calcula la varianza de los ejercicios 21 y 22.

D. **DESVIACIÓN TÍPICA** $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N}}}$

26.Calcula la desviación típica de los ejercicios 21 y 22.

E. **COEFICIENTE DE VARIACIÓN** $\boldsymbol{CV = \frac{\sigma}{\bar{X}}}$

27.Calcula el coeficiente de variación de los ejercicios 21 y 22.
28.Dada la siguiente tabla, calcula los parámetros estadísticos de dispersión.

x_i	f_i
1	12
2	15
3	24
4	19
5	10

29. En una excursión participan 25 personas con las siguientes edades:

8	10	10	11	12
36	37	37	38	40
42	43	43	44	45
47	48	50	52	53
55	58	61	63	67

a. Haz una tabla de frecuencias clasificando las edades en 6 intervalos que comienzan en 7,5 y acaban en 67,5.
b. Calcula $\bar{x}, \sigma$ y CV con dichos intervalos y sin agruparlos.
c. Si prescindimos de los 5 niños tenemos un grupo de 20 personas. Calcula sus parámetros y compáralos con los obtenidos en el grupo inicial.

TEMA 13. AZAR Y PROBABILIDAD

1. INTRODUCCIÓN

Al principio la teoría de la probabilidad estuvo muy relacionada con los juegos y las apuestas.

¿Qué es más fácil, sacar un cuatro con un dado, o sumar ocho con dos dados?

2. EXPERIMENTOS ALEATORIOS. SUCESOS

Un **experimento es aleatorio** si en él interviene el azar: Lanzar una moneda, elegir una carta de la baraja, etc.

Suceso elemental: Cada posible resultado de un experimento aleatorio.

Espacio muestral E: Conjunto de todos los sucesos elementales.

Suceso compuesto: suceso formado por varios sucesos elementales.

Suceso seguro: Siempre se realiza

Suceso imposible: Nunca se realiza

Sucesos compatibles: Pueden ocurrir simultáneamente.

Suceso incompatibles: No pueden ocurrir a la vez.

Ejemplo: Se tira un dado y se anota el número.

El espacio muestral $E = \{1,2,3,4,5,6\}$
El suceso A= "salir un múltiplo de 4" es elemental $A = \{4\}$
El suceso B="salir un número par" es compuesto $B = \{2,4,6\}$
El suceso C="salir un número negativo" es imposible
El suceso D="salir un número menor a 8" es seguro.
Los sucesos A y B son compatibles.
El suceso $F = \text{salir un número impar} = \{1,3,5\}$ y el suceso B son incompatibles.

1. Si tenemos una baraja española y cogemos una carta al azar, ¿cuál es el espacio muestral? Escribe algunos sucesos elementales y otros compuestos.
2. En una urna hay 10 bolas de 4 colores distintos. Sacamos una urna y anotamos su color. Escribe el espacio muestral.
3. Escribe un experimento aleatorio, su espacio muestral, dos sucesos elementales y dos compuestos.
4. En el experimento aleatorio de sacar una carta de la baraja, se consideran 3 sucesos:

   A="Sacar un As"   B="Sacar una copa"   C="Sacar un rey"

   a. Determina si son compatibles o incompatibles.
   b. Escribe un suceso compatible con C.
   c. Escribe un suceso incompatible con B.

d. Escribe un suceso imposible.
e. Escribe un suceso incompatible con A,B y C a la vez.

3. OPERACIONES CON SUCESOS. PROPIEDADES.

- La unión de los sucesos A y B, es un suceso formado por todos los sucesos elementales de A y B: $\boldsymbol{A \cup B}$
- La intersección de los sucesos A y B es un suceso formado por los sucesos elementales comunes de A y B: $\boldsymbol{A \cap B}$
- El suceso contrario o complementario de un suceso A es el suceso formado por todos los sucesos elementales que no están en A**:** $\boldsymbol{\bar{A}}$
- $A \cup \bar{A} = E$ $\qquad E\ es\ el\ espacio\ muestral.$
- $A \cap \bar{A} = \emptyset$ $\qquad \emptyset\ es\ el\ conjunto\ vacío\ (ningún\ elemento)$
- $\bar{\bar{A}} = A$
- Dos sucesos A y B son incompatibles si $A \cap B = \emptyset$

5. Tenemos un lado octaédrico (8 caras numeradas del 1 al 8). Dados los sucesos:

A={3,5,7} B={2,4,5,8} C={1} D={1,2,3} E= Espacio muestral

Calcula:

a. $A \cup B$
b. $A \cap B$
c. $A \cup D$
d. $A \cap C$
e. $B \cap D$
f. $B \cup E$
g. $B \cap E$
h. $C \cup D$
i. $C \cup E$

6. En el ejercicio anterior calcula los sucesos complementarios de A,B,C y D

7. Si sacamos una carta de la baraja española. Halla la unión y la intersección de los siguientes sucesos

a. A="Sacar oros" B="Sacar espadas"
b. C="Sacar un as" D="Sacar bastos"
c. F="Sacar un rey" G="Sacar un caballo"

8. Al lanzar un dado de 6 caras consideramos los sucesos: A={1,3,5} y B={2,5,6}. Calcula:

a. $A \cup B$
b. $\bar{A} \cup \bar{B}$
c. $\bar{A} \cap B$
d. $\overline{A \cup B}$
e. $\overline{A \cap B}$

4. PROBABILIDAD DE UN SUCESO. REGLA DE LAPLACE.

La probabilidad de un suceso es un número entre 0 y 1 que indica la posibilidad de que ocurra dicho suceso.

Regla de Laplace: Si todos los resultados de un experimento son igualmente probables (tienen la misma probabilidad) entonces dado un suceso A tenemos:

$$P(A) = \frac{Número\ de\ casos\ favorables\ a\ A}{Número\ de\ casos\ posibles\ del\ experimento}$$

- $P(E) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $Para\ cualquier\ suceso\ A\ se\ cumple\ que\quad 0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
- Si A y B son sucesos incompatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Si A y B son sucesos compatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

9. En una caja hay 24 bombones, 6 de almendra y el resto de avellana. Sea el suceso A={Sacar un bombón de avellana}. Calcula $P(A)\ y\ \ P(\overline{A})$

10. En el experimento aleatorio de tirar un dado de 6 caras, calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:

    a. "Sacar un número par"
    b. "Sacar un número mayor que 5"
    c. "Sacar un número menor o igual a 6"
    d. "Sacar un 7"

11. Calcula la probabilidad de que al extraer al azar una carta de una baraja española:
    a. Sea un caballo.
    b. Sea de oros.
    c. Sea una figura.
    d. No sea de oros.

12. En una caja hay 10 caramelos de menta, 6 de fresa y 5 de manzana. Calcula la probabilidad de que al sacar un caramelo:
    a. Sea de fresa
    b. No sea de menta
    c. Sea de anís
    d. No sea de anís
    e. Sea de fresa o de manzana.

13. En una caja hay 3500 clavos de los cuales 25 son defectuosos. Calcula la probabilidad de sacar un clavo no defectuoso.

14. Un dado está trucado y la probabilidad de que salga el 5 es el triple de que salga cualquier otro número. Calcula la probabilidad de que salga un 5 y la probabilidad de que salga un 6.

15. Al extraer al azar una carta de la baraja española se consideran los sucesos: S="salir una sota" R="salir un rey" C="salir copas" calcula:
    a. $P(S \cup R)$
    b. $P(S \cup C)$

16. En una urna hay 100 bolas numeradas del 1 al 100. Si sacamos una bola al azar, calcula:
    a. Probabilidad de sacar un múltiplo de 5.
    b. Probabilidad de sacar un múltiplo de 2.
    c. Probabilidad de sacar un número menor o igual que 30.
    d. Probabilidad de sacar un múltiplo de 10.
    e. Probabilidad de sacar el número 36.

5. FRECUENCIA Y PROBABILIDAD. (Ley de los grandes números)

Al repetir muchas veces una misma experiencia aleatoria, la frecuencia relativa de cada suceso toma valores muy parecidos a su probabilidad.

17. Se ha lanzado 85 veces una moneda y han salido 43 caras. ¿Cuál es la frecuencia relativa del suceso "salir cruz"?

18. Un jugador presenta las siguientes estadísticas chutando a puerta: 35 goles y 278 fallos. ¿Qué probabilidad asignarías a los sucesos G="meter gol" y F="fallar".

6. EXPERIENCIAS COMPUESTAS. DIAGRAMAS DE ÁRBOL.

Un experimento compuesto es la combinación de dos o más experimentos simples (lanzar una moneda y un dado).

Si un experimento tiene $\boldsymbol{p}$ resultados posibles y otro experimento tiene $\boldsymbol{q}$ resultados posibles, entonces el número total de resultados posibles para el experimento compuesto es $\boldsymbol{p \cdot q}$

Para realizar el recuento de los distintos resultados de forma ordenada, se utiliza el diagrama de árbol.

La probabilidad de un *camino del diagrama de árbol* de un experimento compuesto es igual al producto de las probabilidades de cada una de las ramas que componen dicho camino.

19. Lanzamos una moneda y un dado cúbico. Construye mediante un diagrama de árbol el espacio muestral y calcula la probabilidad de cada camino.

20. Lanzamos 3 monedas, dibuja el diagrama de árbol correspondiente y calcula la probabilidad de:
    a. Sacar 3 caras
    b. Sacar 3 cruces
    c. Sacar 1 cruz
    d. Sacar 2 caras

21. Se lanzan dos dados y se suman sus puntos. Dibuja el diagrama de árbol y calcula la probabilidad de :
    a. La suma sea 3
    b. La suma sea 7
    c. La suma sea mayor de 10
    d. La suma sea menor de 8
    e. La suma sea 4 ó 5.

22. Tiramos un dado cúbico y otro octaédrico. Calcula:
    a. Probabilidad de obtener dos números pares.
    b. Probabilidad de obtener un 1 en el dado.
    c. Probabilidad de que la suma sea 8.
    d. Probabilidad de que la suma sea 10.

23. En una comida hay 28 hombres y 32 mujeres. Han tomado carne 16 hombres y 20 mujeres y el resto ha tomado pescado. Si elegimos una persona al azar, calcula:
    a. Probabilidad de que sea hombre
    b. Probabilidad de que la persona haya tomado pescado
    c. Probabilidad de que sea hombre y haya tomado carne.

24. Un juego consiste en tirar dos dados. Ganamos si sale 7 ó 10. Calcula la probabilidad que tenemos de ganar.